



Séries chronologiques

Approche classique

Thierry Dhorne

4 janvier 2017





Introduction

- ❖ Définition
- ❖ Représentation graphique
- ❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique
- ❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

Introduction





Définition

Introduction

❖ Définition

❖ Représentation graphique

❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique

❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

Série temporelle (ou chronologique)

C'est une suite d'observations $(X(t_1), \dots, X(t_T))$ indexée par le temps.

T est le nombre (de temps) d'observations

les instants d'observations sont t_1, \dots, t_T

*** les écarts entre temps d'observation sont constants**

- on utilise indifféremment la notation $X(t)$ ou X_t
- ★ si l'on choisit comme unité de temps l'intervalle d'observation
- l'écriture se simplifie

$$(X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_T)$$





Représentation graphique

Introduction

❖ Définition

❖ Représentation graphique

❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique

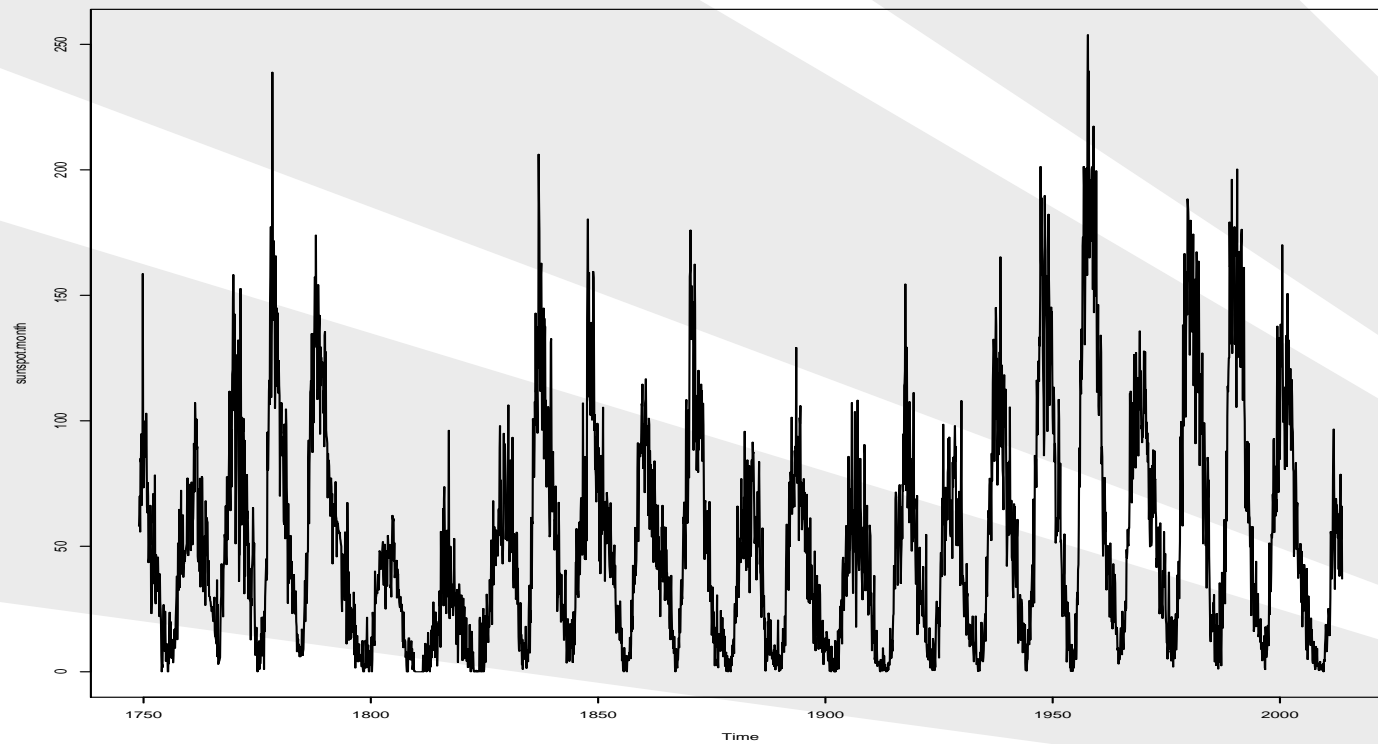
❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

- en **abscisse** : le **temps** (secondes, jours, mois, années, etc...) ou les dates ;
- en **ordonnée** : les valeurs des **observations**.
- exemple : nombre de tâches solaires par semaine





Production annuelle de champagne

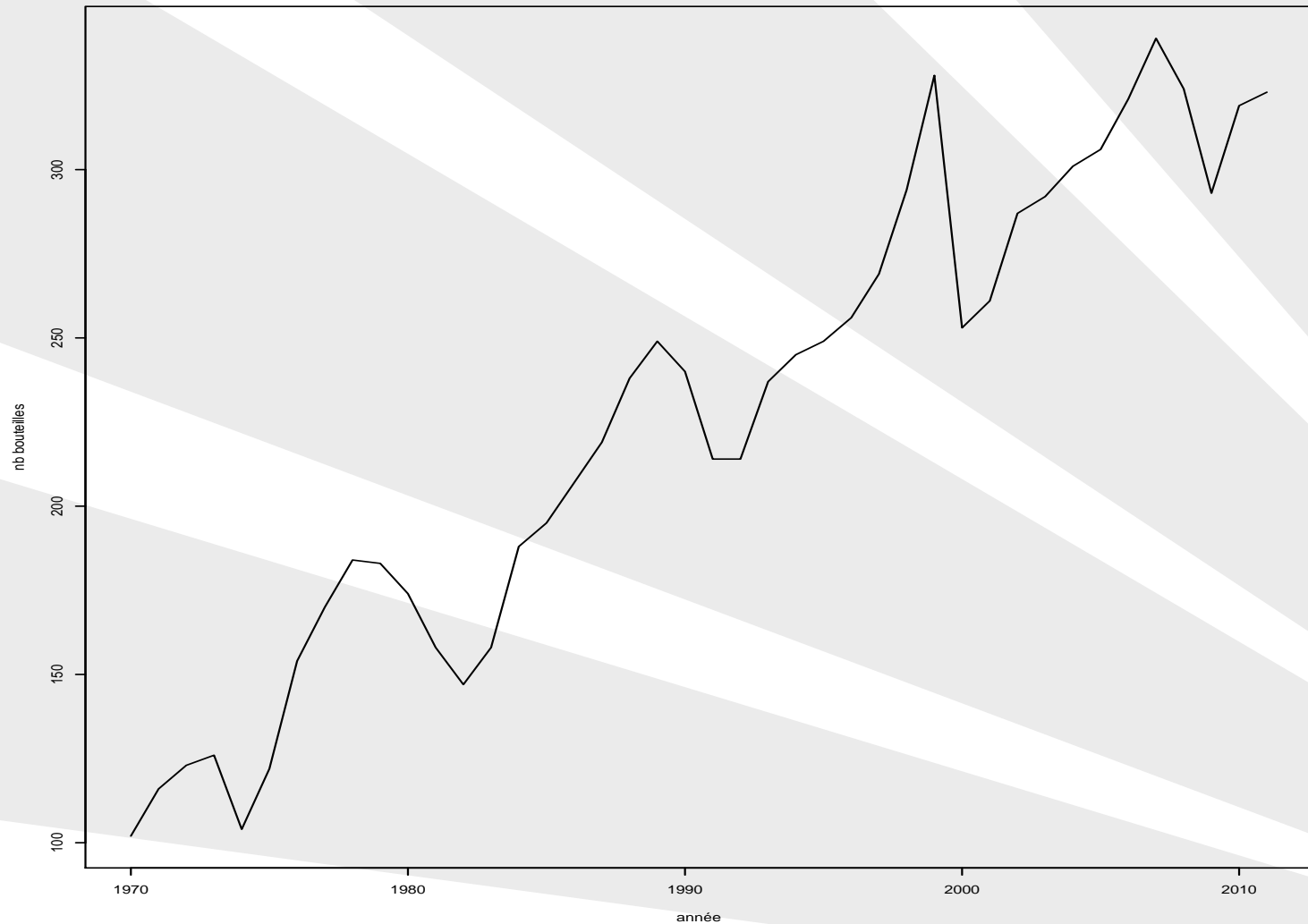
Introduction

- ❖ Définition
- ❖ Représentation graphique
- ❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique
- ❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision





Immatriculations mensuelles en Bretagne

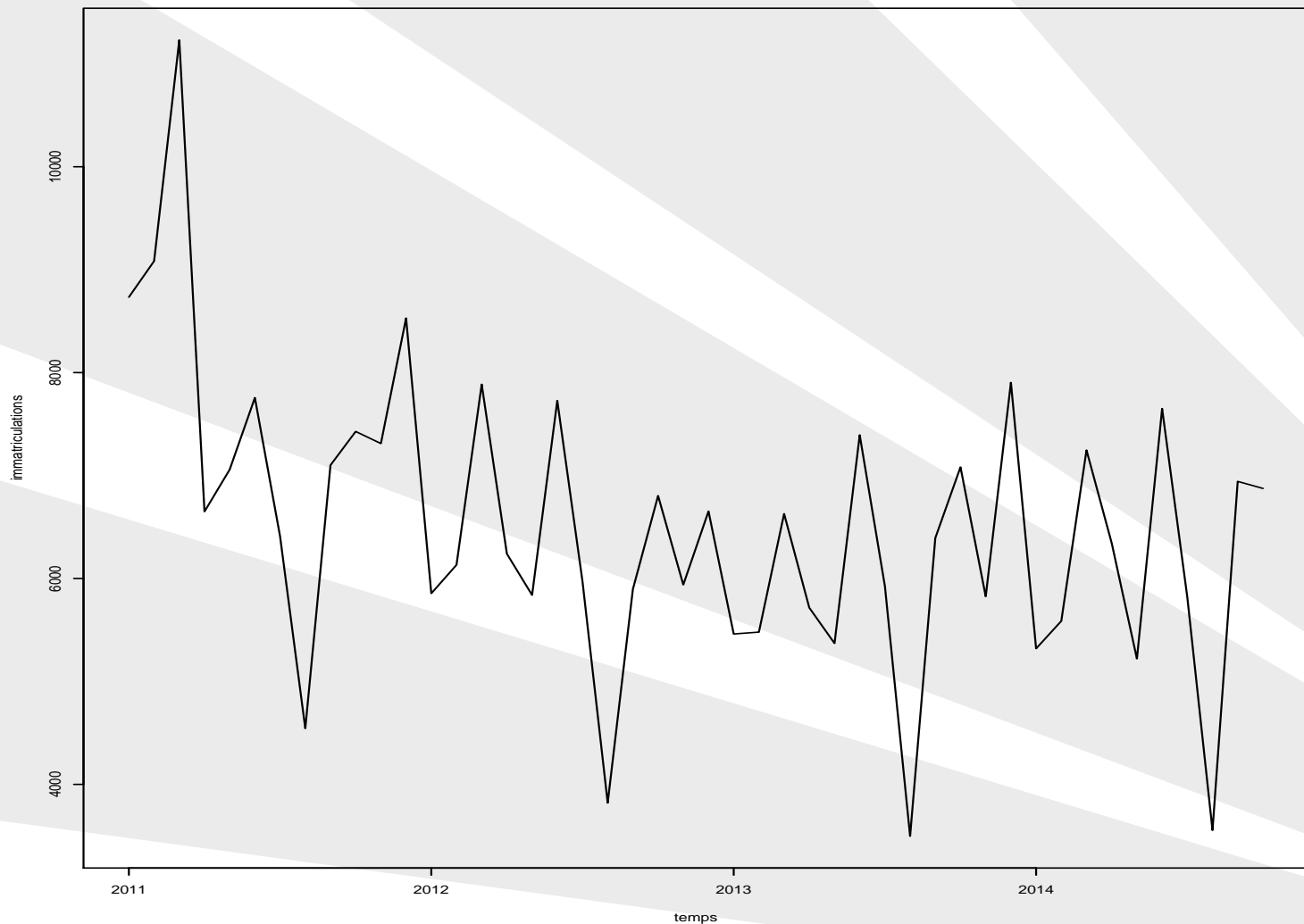
Introduction

- ❖ Définition
- ❖ Représentation graphique
- ❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique
- ❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision





Objectifs de l'étude d'une série chronologique

Introduction

- ❖ Définition
- ❖ Représentation graphique

❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique

- ❖ Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

- décrire l'évolution sur un intervalle de temps (donner les caractéristiques principales).
- comparer deux évolutions sur un même intervalle de temps
- prévoir une évolution sur un intervalle de temps futur (non observé)





Applications

Introduction

- ❖ Définition
- ❖ Représentation graphique
- ❖ Objectifs de l'étude d'une série chronologique

Applications

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

- Économie : observation quotidienne des cours d'une action. Description de l'évolution, prévision future.
- Environnement :
 - Météorologie : étude des vents. On peut observer l'évolution de la force du vent et de sa direction.
 - Écologie : observation de la durée des éruptions d'un volcan. L'intervalle entre deux éruptions est de longueur variable. Deux notions de temps : abscisse en mois/années, ordonnée en heures.
- Démographie :
 - évolution de la population française.
 - comparaison de l'évolution de deux populations.
- Marketing : observation mensuelle de ventes d'un produit.





Introduction

Structure d'une série chronologique

- ❖ Éléments d'une série chronologique
- ❖ Tendance
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Composante résiduelle

Analyse classique

Lissage et prévision

Structure d'une série chronologique





Éléments d'une série chronologique

Introduction

Structure d'une série chronologique

❖ Éléments d'une série chronologique

❖ Tendance

❖ Saisonnalité

❖ Composante résiduelle

Analyse classique

Lissage et prévision

- les éléments constituant une série statistique sont
 - la (composante de) tendance qui caractérise l'évolution à long terme de la série
 - ★ composante déterministe
 - la (composante de) saisonnalité qui caractérise une périodicité (éventuelle) de la série
 - ★ composante déterministe
 - la composante résiduelle (ou fluctuation) qui caractérise l'évolution à court terme de la série
 - ★ composante stochastique (ou aléatoire)
 - les irrégularités ou perturbations qui se distinguent des autres composantes
 - ★ composante déterministe (événement imprévu) ou stochastique (rupture)





Tendance

Introduction

Structure d'une série chronologique

❖ Éléments d'une série chronologique

❖ Tendance

❖ Saisonnalité

❖ Composante résiduelle

Analyse classique

Lissage et prévision

- la tendance est habituellement notée $\mu(t)$ ou μ_t pour $t = 1, 2, \dots, T$
- il existe des tendances
 - linéaires (croissantes ou décroissantes)
 - exponentielles
 - avec seuil (inverse exponentielle)
- ★ plus rarement on peut considérer des tendances polynomiales ou logarithmiques
- voir champagne et voitures





Saisonnalité

Introduction

Structure d'une série chronologique

❖ Éléments d'une série chronologique

❖ Tendance

❖ Saisonnalité

❖ Composante résiduelle

Analyse classique

Lissage et prévision

- la saisonnalité est habituellement notée $\sigma(t)$ ou σ_t
- cette saisonnalité est liée à une périodicité T :

$$\sigma(t + T) = \sigma(t)$$

➤ il faut donc découper la période T

- les périodicités habituelles sont

- la journée (cycle naturel)
- la semaine (cycle économique)
- l'année (cycle naturel et économique)

★ il y a quelques années le prix du porc avait un cycle de 3 ans

- on découpe les périodes

- la journée en heures
- la semaine en jours
- l'année en mois

➤ voir sunspot et voit-bret





Composante résiduelle

Introduction

Structure d'une série chronologique

- ❖ Éléments d'une série chronologique
- ❖ Tendance
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Composante résiduelle

Analyse classique

Lissage et prévision

- elle est habituellement notée $E(t)$ ou E_t
- on la considère (en modélisation) comme une variable aléatoire





Introduction

Structure d'une série
chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques
d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la
tendance
- ❖ Série stationnarisée
pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité
de la tendance
- ❖ Détection de la
périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la
tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et
désaisonnalisation
- ❖ Estimation des
paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des
paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

Analyse classique





Conditions théoriques d'étude

Introduction

Structure d'une série
chronologique

Analyse classique

❖ Conditions théoriques
d'étude

- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la
tendance
- ❖ Série stationnarisée
pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité
de la tendance
- ❖ Détection de la
périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la
tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et
désaisonnalisation
- ❖ Estimation des
paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des
paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

- Stationnarité
- Ergodicité





L'approche empirique

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

❖ Conditions théoriques d'étude

❖ L'approche empirique

❖ Extraction de la tendance

❖ Série stationnarisée pour la tendance

❖ Test de non linéarité de la tendance

❖ Détection de la périodicité

❖ Test de saisonnalité

❖ Estimation de la tendance + saisonnalité

❖ Détrendisation et désaisonnalisation

❖ Estimation des paramètres - sans β_0

❖ Estimation des paramètres - avec β_0

❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

- Modèle linéaire classique (additif ou multiplicatif)
- Modélisation de la tendance
- Modélisation de la saisonnalité
- Modèle global
- Conduit à une série stationnaire !





Extraction de la tendance

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude

- ❖ L'approche empirique

❖ Extraction de la tendance

- ❖ Série stationnarisée pour la tendance

- ❖ Test de non linéarité de la tendance

- ❖ Détection de la périodicité

- ❖ Test de saisonnalité

- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité

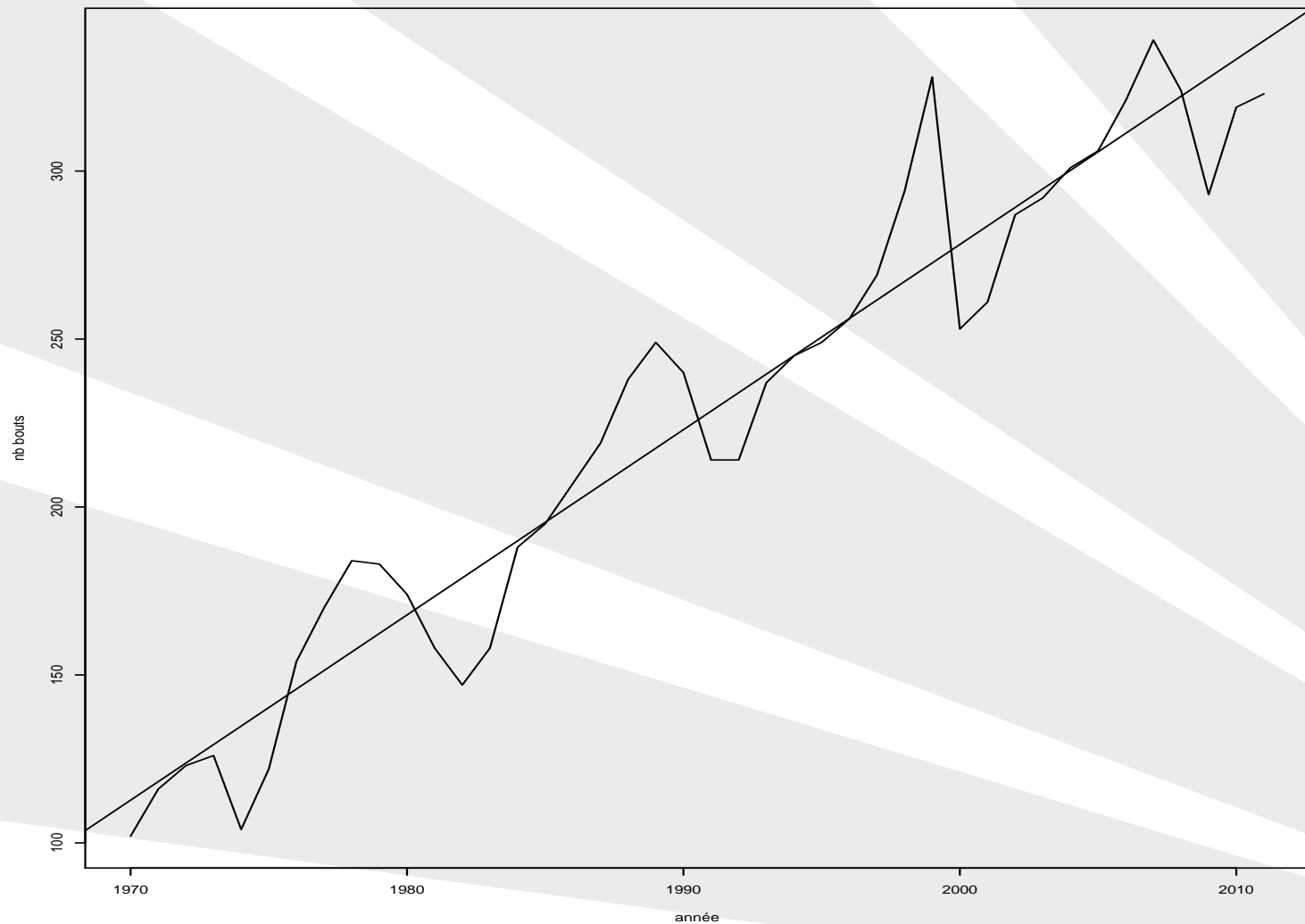
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation

- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0

- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0

- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision





Série stationnarisée pour la tendance

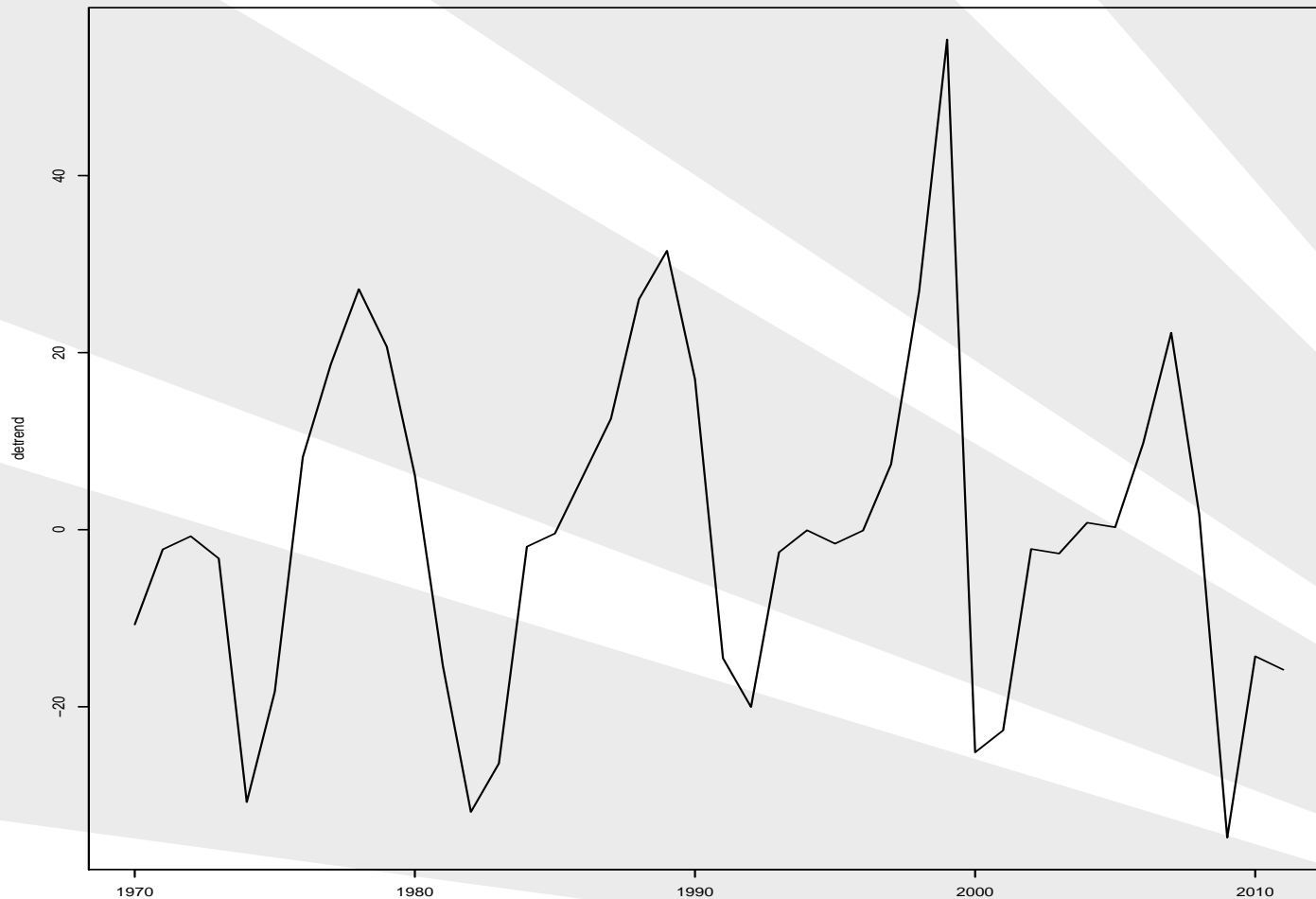
Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision



★ on constate une légère tendance résiduelle qu'il faudrait tester !





Test de non linéarité de la tendance

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

Residual Standard Error=18.8

R-Square=0.932

F-statistic (df=2, 39)=267.3

p-value=0

	Estimate	Std.Err	t-value	Pr(> t)
Intercept	-11116.003	514.5780	-21.602	0.0000
X1	5.699	0.2588	22.020	0.0000
X2	0.000	0.0000	-1.873	0.0685

★ après quelques tâtonnements, on atteint à peine la limite de significativité

- on gardera donc un modèle avec tendance linéaire
- on retestera après désaisonnalisation





Détection de la périodicité

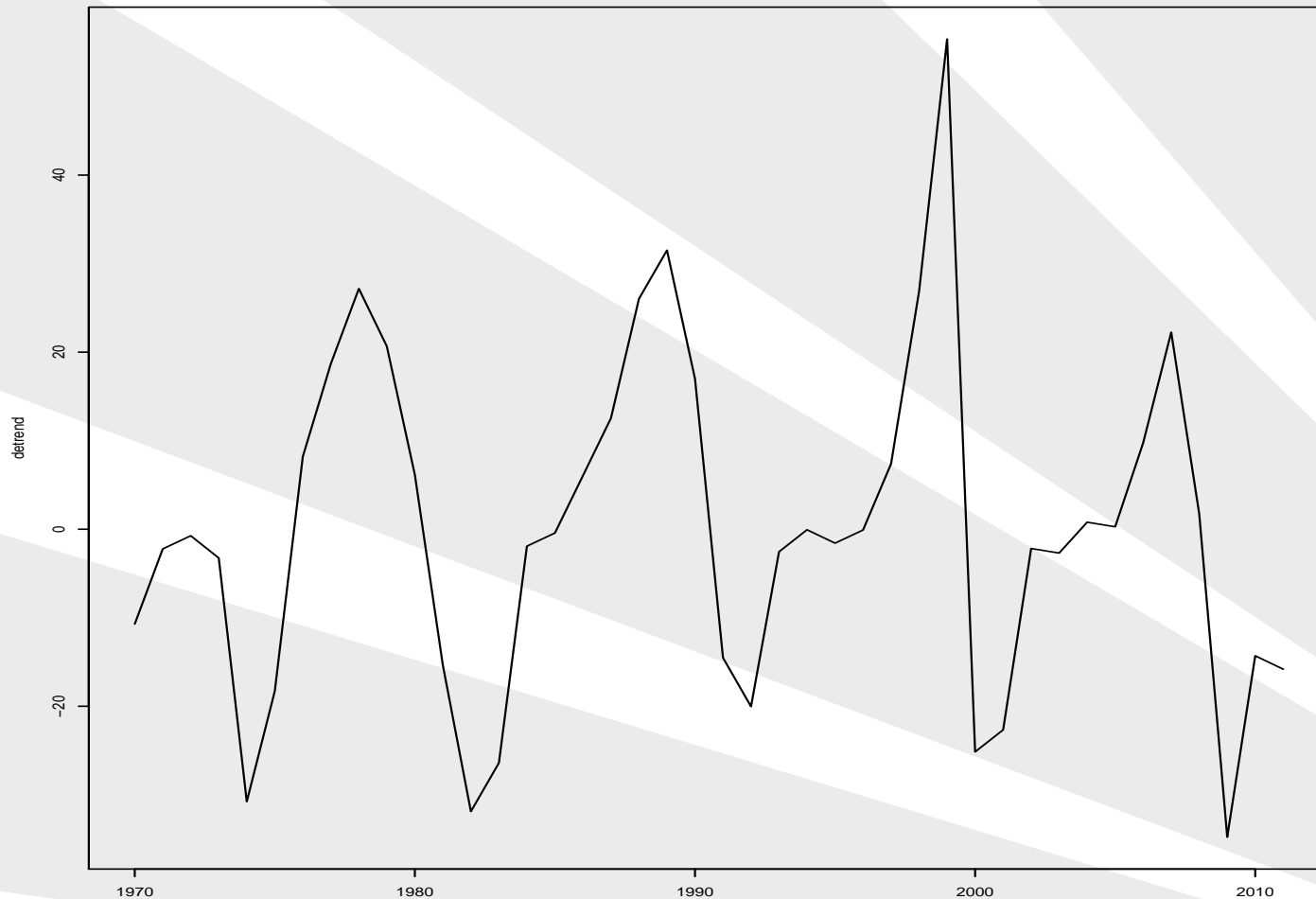
Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

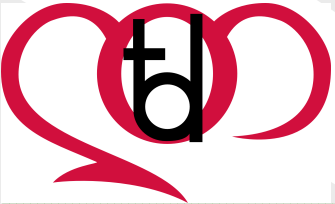
- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision



★ les écarts entre les minimums locaux sont de 8,10,8 et 9 et entre les maximums de 11,10 et 8, on a donc en moyenne un écart de 9





Test de saisonnalité

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

❖ Conditions théoriques d'étude

❖ L'approche empirique

❖ Extraction de la tendance

❖ Série stationnarisée pour la tendance

❖ Test de non linéarité de la tendance

❖ Détection de la périodicité

❖ Test de saisonnalité

❖ Estimation de la tendance + saisonnalité

❖ Détrendisation et désaisonnalisation

❖ Estimation des paramètres - sans β_0

❖ Estimation des paramètres - avec β_0

❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

```

      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
année      1 187652  187652  442.90 <2e-16 ***
p8         7   1036    148     0.35  0.92
Residuals 33  13982    424
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
année      1 187652  187652  937.23 < 2e-16 ***
p9         8   8611   1076    5.38 0.00025 ***
Residuals 32   6407    200
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
année      1 187652  187652  703.46 <2e-16 ***
p10       9   6749    750    2.81  0.015 *
Residuals 31   8269    267
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

★ la périodicité 9 est la plus significative





Estimation de la tendance + saisonnalité

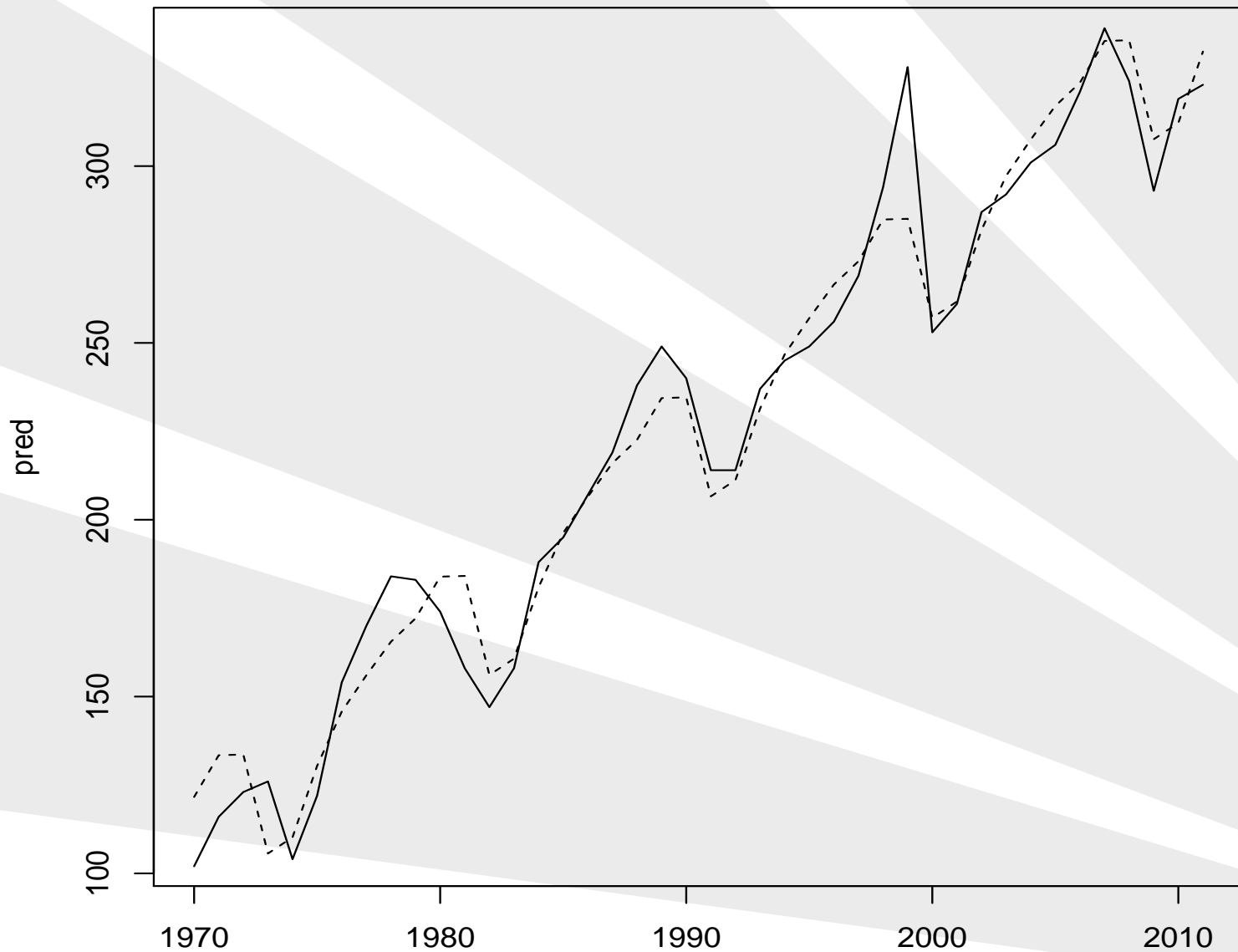
Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendrisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision





Détrendisation et désaisonnalisation

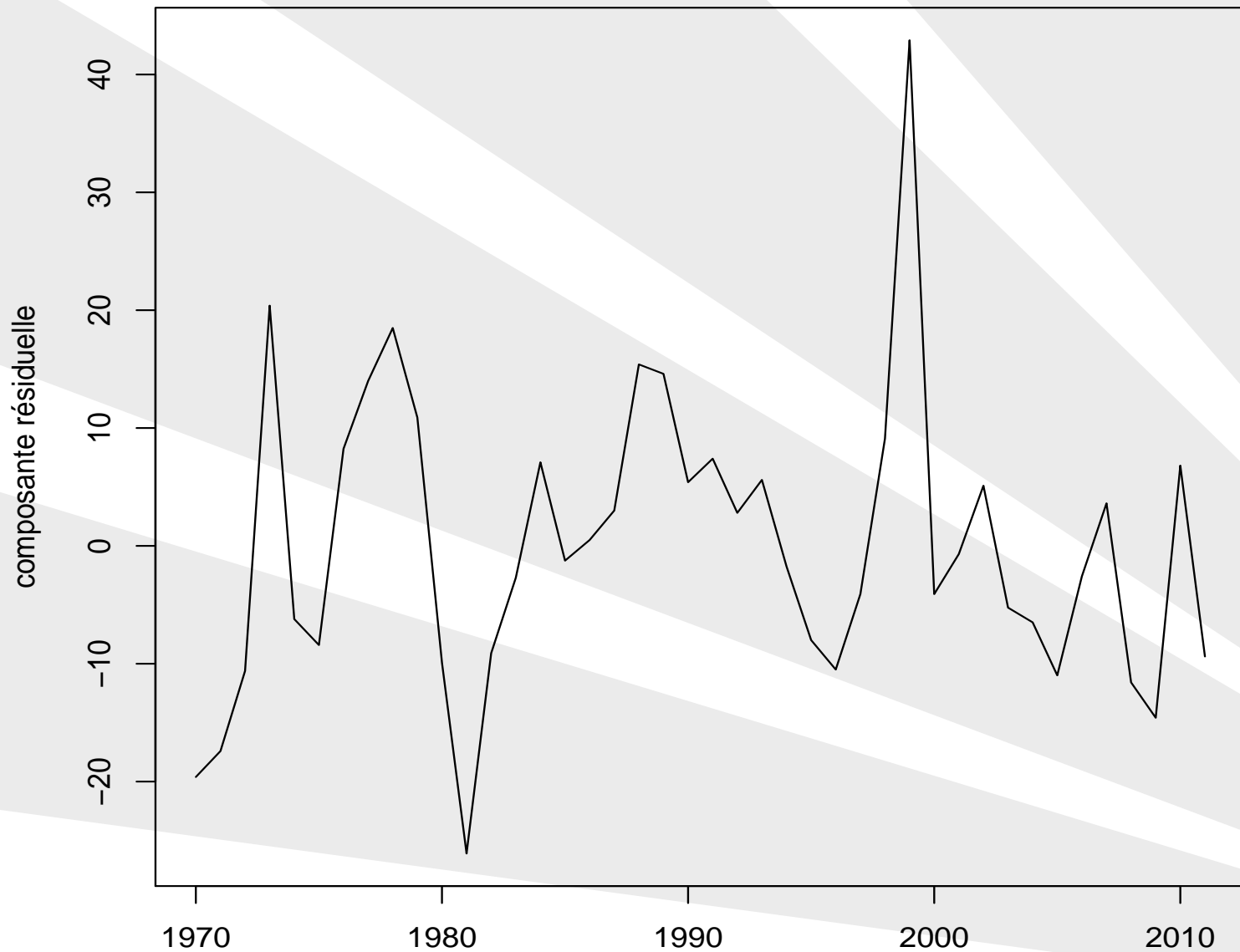
Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ **Détrendisation et désaisonnalisation**
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision





Estimation des paramètres - sans β_0

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

\$coefficients

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
année	5.61	0.1815	30.90	2.117e-25
p91	-10930.82	360.9640	-30.28	3.972e-25
p92	-10924.63	361.1456	-30.25	4.105e-25
p93	-10930.04	361.3271	-30.25	4.106e-25
p94	-10963.65	361.5086	-30.33	3.793e-25
p95	-10964.66	361.6901	-30.32	3.841e-25
p96	-10950.07	361.8716	-30.26	4.065e-25
p97	-10940.33	361.2502	-30.28	3.962e-25
p98	-10935.69	361.4317	-30.26	4.078e-25
p99	-10931.80	361.6132	-30.23	4.187e-25





Estimation des paramètres - avec β_0

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

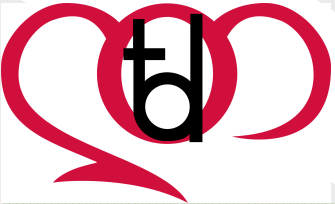
- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

\$coefficients

	Estimate	Std. Error	t value
rep(1, 42)	-1.093e+04	361.6132	-30.2307
année	5.610e+00	0.1815	30.9037
p91	9.863e-01	9.5133	0.1037
p92	7.176e+00	9.5029	0.7551
p93	1.766e+00	9.4960	0.1859
p94	-3.184e+01	9.4925	-3.3547
p95	-3.286e+01	9.4925	-3.4612
p96	-1.827e+01	9.4960	-1.9235
p97	-8.529e+00	10.0121	-0.8519
p98	-3.890e+00	10.0072	-0.3887
	Pr(> t)		
rep(1, 42)	4.187e-25		
année	2.117e-25		
p91	9.181e-01		
p92	4.557e-01		
p93	8.537e-01		
p94	2.057e-03		
p95	1.547e-03		
p96	6.335e-02		
p97	4.006e-01		
p98	7.001e-01		





Test de saisonnalité

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

- ❖ Conditions théoriques d'étude
- ❖ L'approche empirique
- ❖ Extraction de la tendance
- ❖ Série stationnarisée pour la tendance
- ❖ Test de non linéarité de la tendance
- ❖ Détection de la périodicité
- ❖ Test de saisonnalité
- ❖ Estimation de la tendance + saisonnalité
- ❖ Détrendisation et désaisonnalisation
- ❖ Estimation des paramètres - sans β_0
- ❖ Estimation des paramètres - avec β_0
- ❖ Test de saisonnalité

Lissage et prévision

```

      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
année      1 187652  187652  442.90 <2e-16 ***
p8         7   1036    148     0.35   0.92
Residuals 33  13982    424
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

      Df Sum Sq Mean Sq
année      1 187652  187652
p9         8   8611   1076
I(abs(champ[, 1] - 1989)^6.4) 1    614    614
Residuals 31   5793    187
      F value Pr(>F)
année 1004.15 < 2e-16 ***
p9      5.76 0.00016 ***
I(abs(champ[, 1] - 1989)^6.4) 3.29 0.07960 .
Residuals
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
année      1 187652  187652  703.46 <2e-16 ***
p10       9   6749    750     2.81  0.015 *
Residuals 31   8269    267
---
Signif. codes:
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```





Introduction

Structure d'une série
chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

- ❖ Principe
- ❖ Lissage exponentiel simple
- ❖ Lissage exponentiel simple
- ❖ Lissage exponentiel double et généralisé
- ❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)
- ❖ Sous SAS

Lissage et prévision





Principe

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

❖ Principe

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel double et généralisé

❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

- la méthode ne part pas d'un modèle (comme dans le cas précédent)
- mais directement d'un prédicteur
- le prédicteur le plus classique est la moyenne mobile

$$\widehat{X}_{T+1} = \frac{1}{K+1} \sum_{k=0}^K X_{T-k}$$

- ★ néanmoins il est peu utilisé en pratique
- on préfère donner un poids plus important aux observations récentes





Lissage exponentiel simple

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

❖ Principe

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel double et généralisé

❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

- le cas le plus simple est celui du lissage à l'ordre 1 (récurrence)

$$\widehat{X}_{T+1} = \lambda X_T + (1 - \lambda) \widehat{X}_T$$

- ce qui peut encore s'écrire

$$\widehat{X}_{T+1} = \widehat{X}_T + \lambda(X_T - \widehat{X}_T)$$

- ce qui veut dire qu'il y a actualisation de la prédiction grâce à la connaissance de la valeur X_T

- on est conduit par récurrence à

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{T+1} &= \lambda X_T + (1 - \lambda)[\lambda X_{T-1} + (1 - \lambda)\widehat{X}_{T-1}] \\ &= \lambda(X_T + (1 - \lambda)X_{T-1}) + (1 - \lambda)^2 \widehat{X}_{T-2} \\ &= \lambda(X_T + (1 - \lambda)X_{T-1} + (1 - \lambda)^2 X_{T-2}) + (1 - \lambda)^3 \widehat{X}_{T-3}\end{aligned}$$





Lissage exponentiel simple

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

❖ Principe

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel double et généralisé

❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

Forme du lisseur exponentiel simple

$$\widehat{X}_{T+1} = \lambda \sum_{j=0}^T (1 - \lambda)^j X_{T-j}$$

- λ peut être choisi par expertise
- ou optimisé pour que

$$\sum_{t=1}^T [X_{t+1} - \lambda \sum_{j=0}^T (1 - \lambda)^j X_{T-j}]^2$$

soit minimal





Lissage exponentiel double et généralisé

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

❖ Principe

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel double et généralisé

❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

- le lissage exponentiel simple postule l'absence de tendance
- le lissage exponentiel double vise à tenir compte d'une éventuelle tendance (linéaire)
- le lissage de Holt et Winters





Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

❖ Principe

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel simple

❖ Lissage exponentiel double et généralisé

❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

- pas de modèle à écrire
- certes, mais la prévision est un peu boîte noire
- pas de connaissance des phénomènes
- nécessite quand même une expertise
- choix du (ou des) paramètre(s)





Sous SAS

Introduction

Structure d'une série chronologique

Analyse classique

Lissage et prévision

- ❖ Principe
- ❖ Lissage exponentiel simple
- ❖ Lissage exponentiel simple
- ❖ Lissage exponentiel double et généralisé
- ❖ Avantages et inconvénients du lissage (par rapport à la modélisation)

❖ Sous SAS

- il existe la vieille PROC FORECAST
- on peut cependant suggérer la PROC ESM

