



Séries chronologiques

Approche de Box-Jenkins

Thierry Dhorne

26 novembre 2014

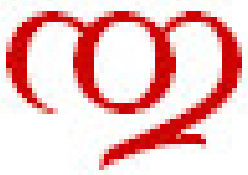


Rappel de la démarche

❖ Rappel de la démarche

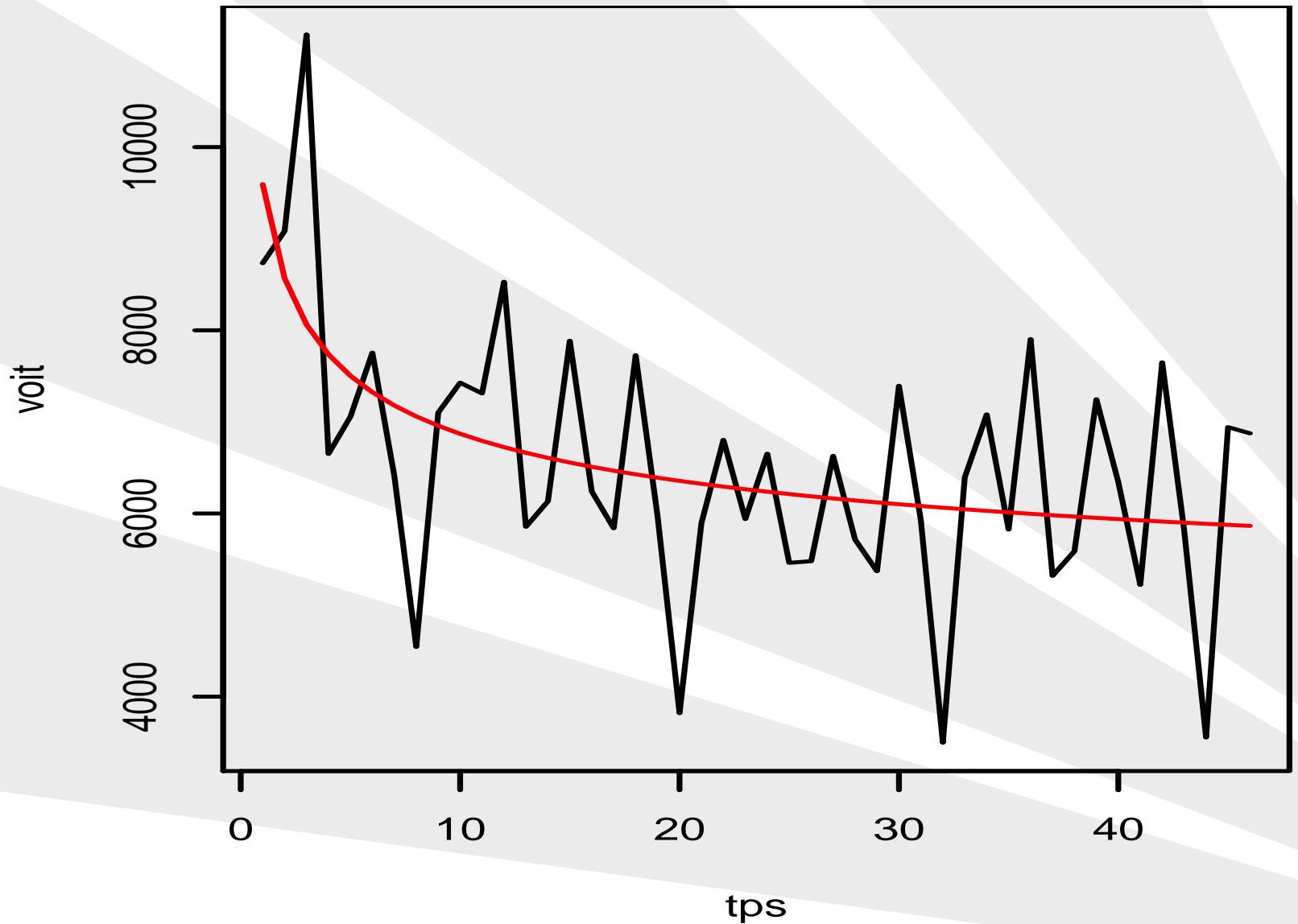
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Préviation

- on part d'une série chronologique que l'on doit modéliser complètement
 - tendance
 - tendance générale croissante ou décroissante souvent linéaire
 - tendance affinée (exemple des immatriculations)
 - saisonnalité
 - éventuellement à plusieurs niveaux
 - composante résiduelle
 - à décomposer par la suite
- ★ cette décomposition doit être faite très sérieusement



Modélisation de la tendance

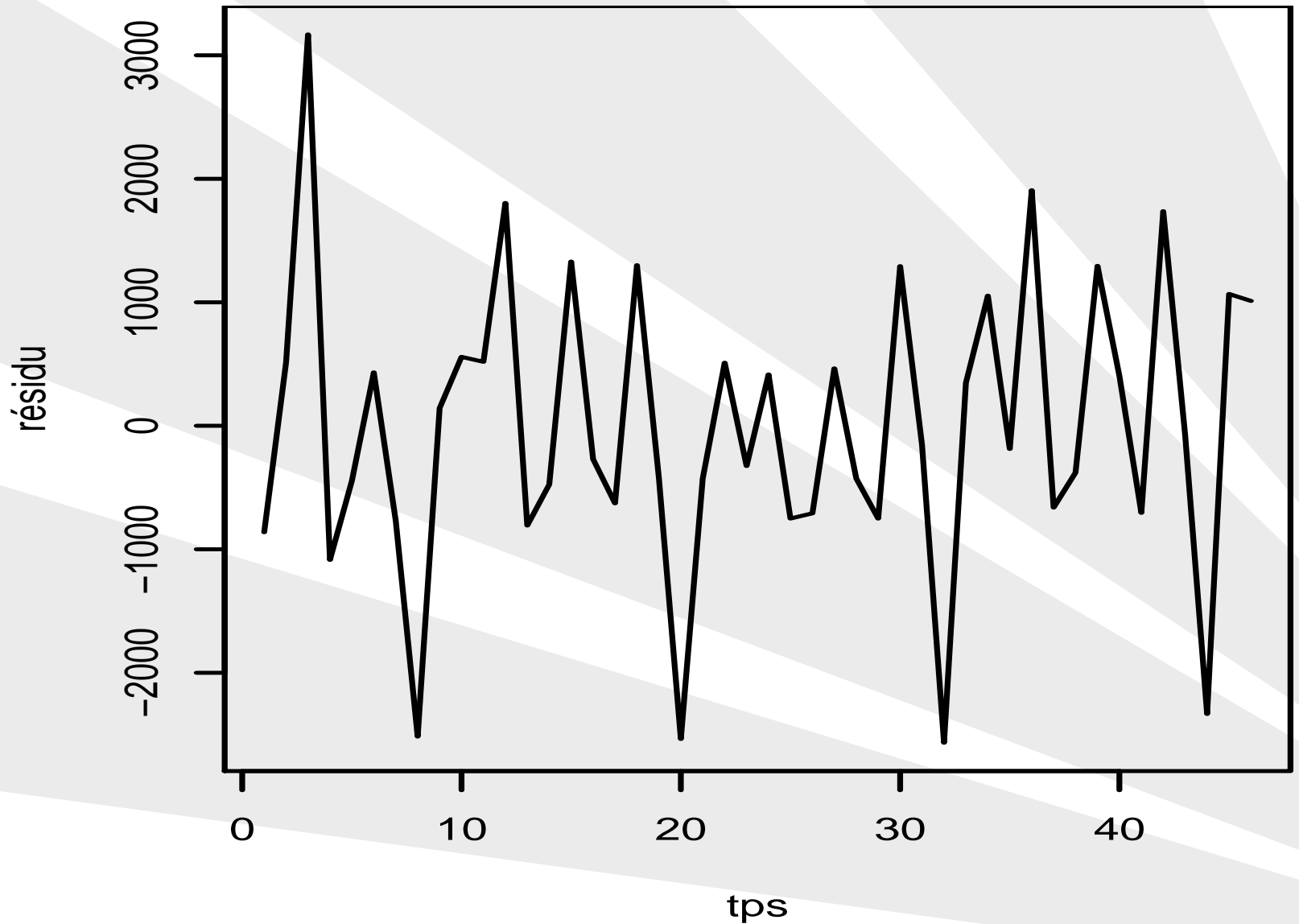
- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ **Modélisation de la tendance**
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Préviation

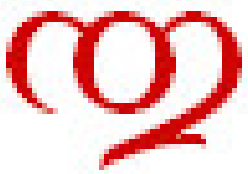




Résidu de la série

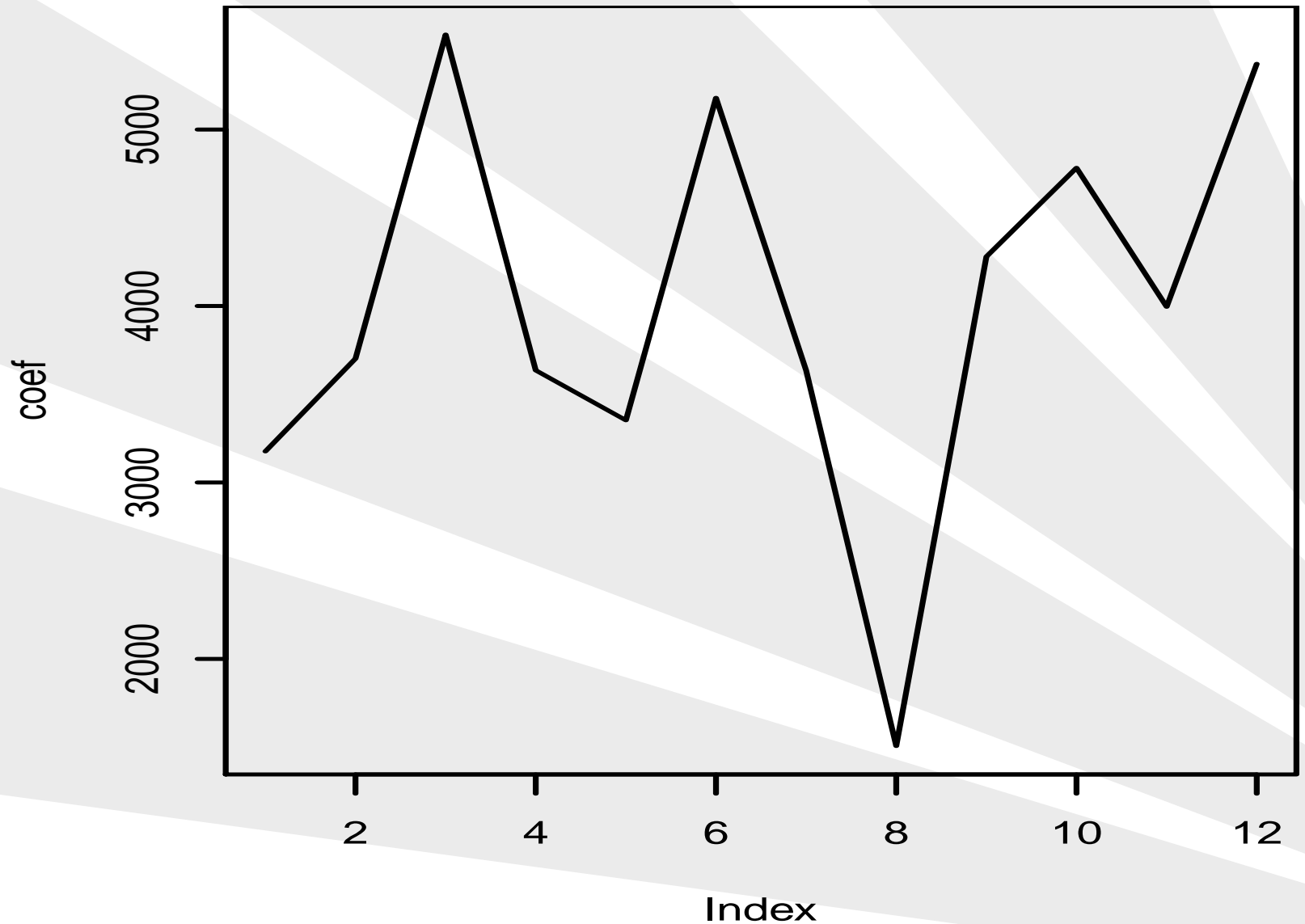
- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision





Saisonnalité

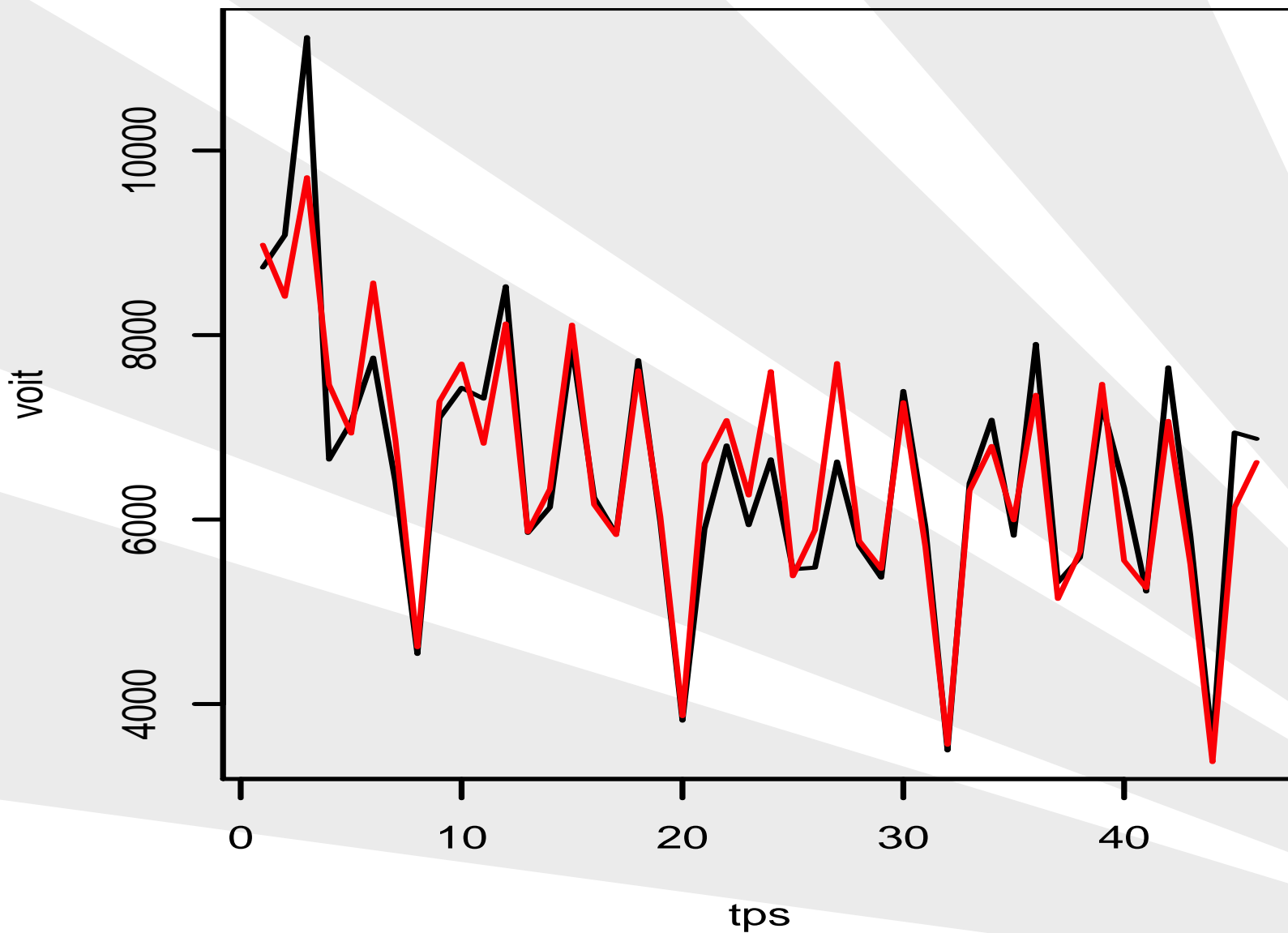
- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision





Tendance + Saisonnalité

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ **Tendance + Saisonnalité**
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision





Modélisation des résidus

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

- modèle AR
- modèle MA
- modèle ARMA



Processus auto-régressif

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ **Processus auto-régressif**
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Préviation

A l'ordre 1 - **AR(1)**

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + E_t$$

où :

- X_t : processus au temps t ,
- E_t : bruit blanc gaussien,
- ϕ_0 et ϕ_1 : paramètres inconnus (à estimer).

A l'ordre p - **AR(p)**

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + E_t$$

processus centré :

$$X'_t = \phi_1 X'_{t-1} + \dots + \phi_p X'_{t-p} + E_t$$

stationnarité



Processus moyenne mobile

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ **Processus moyenne mobile**
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

À l'ordre 1 - **MA(1)**

$$X_t = \theta_0 + E_t - \theta_1 E_{t-1}$$

où :

- X_t : processus au temps t ,
- E_t : bruit blanc gaussien,
- θ_0 et θ_1 : paramètres inconnus (à estimer).

A l'ordre p - **MA(p)**

$$X_t = \theta_0 + E_t + \theta_1 E_{t-1} + \dots + \theta_p E_{t-p}$$

processus centré :

$$X'_t = E_t + \theta_1 E_{t-1} + \dots + \theta_p E_{t-p}$$

stationnarité



Identification

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

- AC théorique et empirique

$$\rho(h) = \frac{C(X_t, X_{t+h})}{V(X_t)},$$

- ACP théorique et empirique

$$r(h) = \frac{C(X_t - X_t^*, X_{t+h} - X_{t+h}^*)}{V(X_t - X_t^*)},$$

où X_t^* et X_{t+h}^* sont les régressions de X_t et X_{t+h} sur $X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}$.

- Stationnarité et Différenciation



Approche de Box-Jenkins

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

Identification

Choix d'un ou de plusieurs modèles ARMA candidats

←

Estimation

↓
Estimation des paramètres des modèles testés

↑

↓
Diagnostic des modèles

↑

Test de l'adéquation

↑

Prévision

oui
←

↓
Modèle satisfaisant

non
→



Estimation

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

- à partir de l'autocorrélation,
- maximum de vraisemblance
- moindres carrés.



Autocorrélation

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation**
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

[1] 0.1304053
[1] 0.1555236
[1] 0.2173002
[1] -0.07357029
[1] 0.07097265
[1] 0.1623489
[1] -0.1368352
[1] 0.1191575
[1] 0.1509136
[1] -0.1124801
[1] 0.002305883
[1] -0.1166351
[1] -0.1879185
[1] 0.06252056
[1] -0.02585123



Test du modèle

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ Prévision

- Indépendance des résidus
- Diagnostique



Prévision

- ❖ Rappel de la démarche
- ❖ Modélisation de la tendance
- ❖ Résidu de la série
- ❖ Saisonnalité
- ❖ Tendance + Saisonnalité
- ❖ Modélisation des résidus
- ❖ Processus auto-régressif
- ❖ Processus moyenne mobile
- ❖ Identification
- ❖ Approche de Box-Jenkins
- ❖ Estimation
- ❖ Autocorrélation
- ❖ Test du modèle
- ❖ **Prévision**

- Méthodes de prévision
- Variance de la prévision