



# Estimation et tests d'hypothèses

Thierry Dhorne

14 septembre 2016



## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

# *Introduction*



# Programme pédagogique national

## Introduction

### ❖ Programme pédagogique national

- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- Volume Horaire : 40h, 15h CM, 15h TD, 10h TP
- 10.5h CM, 21h TD
- Objectifs
  - compléments en estimation
  - acquisition des principes de la théorie des tests.
  - savoir utiliser les tests paramétriques usuels.
- Prérequis
  - M2101 – Initiation à la statistique inférentielle
  - M2103 – Probabilités et simulations 2



## Introduction

❖ Programme pédagogique national

## Contenus

❖ Statistique paramétrique

❖ Modélisation

❖ Modèle

❖ Probabilités et Statistique

❖ Aléatoire - Inconnu

❖ Paramètres, estimateurs, estimation

❖ Paramètres : exemples

❖ Ce qu'il faut faire en pratique

❖ Écriture du modèle

❖ Estimation - Rappels

❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)

❖ Introduction aux tests d'hypothèse

❖ Résumé

❖ Exercices

## ● Contenus

- Compléments d'estimation : intervalles de confiance pour une différence d'espérances, une différence de proportions, un rapport de variances
- Définitions, principes des tests. Hypothèses, règle de décision, erreurs de première et seconde espèce, puissance, degré de signification
- Tests sur les espérances, variances, proportions : comparaison avec une valeur de référence, comparaison de deux distributions (échantillons indépendants ou appariés)
- Tests du khi-deux : ajustement et indépendance sur les tables de contingence

● Mots clés : Estimation, tests d'hypothèse, risques d'erreur, décision



# Statistique paramétrique

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- savoir utiliser les tests « paramétriques » usuels
- « paramétrique » : qui dépend (seulement) des paramètres
- les paramètres de quoi ?
  - les paramètres du modèle
- quand on fait de l'estimation et/ou des tests paramétrique(s)
  - il y a toujours un modèle
    - explicite
    - implicite
  - il faut donc le connaître



# Modélisation

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national

- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique

## ❖ Modélisation

- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse

## ❖ Résumé

- ❖ Exercices

- le modèle que vous connaissez le mieux
- 
- il peut y en avoir d'autres
- pour une proportion
- pour une durée de vie



# Modèle

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation

## ❖ Modèle

- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse

## ❖ Résumé

❖ Exercices | T. Dhorne - [www.dhorne.education](http://www.dhorne.education)

- spécification du modèle
- indentification du ou des paramètre(s)
- ★ le(s) paramètre(s) DOI(VEN)T être noté(s) par des lettres grecques (minuscules)
- cf la "norme" (voir wikipedia : parametric model, estimation theory)



# Probabilités et Statistique

## Introduction

❖ Programme pédagogique national

❖ Contenus

❖ Statistique paramétrique

❖ Modélisation

❖ Modèle

❖ Probabilités et Statistique

❖ Aléatoire - Inconnu

❖ Paramètres, estimateurs, estimation

❖ Paramètres : exemples

❖ Ce qu'il faut faire en pratique

❖ Écriture du modèle

❖ Estimation - Rappels

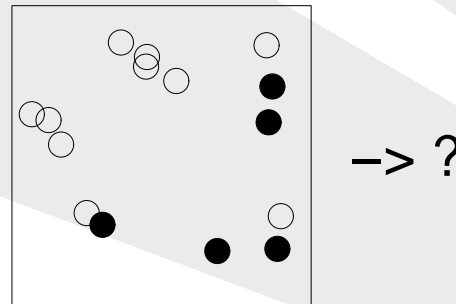
❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)

❖ Introduction aux tests d'hypothèse

❖ Résumé

❖ Exercices

- on utilise un modèle
- exemple : une urne avec des boules dans laquelle on tire
- en proba : on connaît la proportion de boules blanches et noires
- on cherche les probabilités des tirages



- en stat : on observe un tirage
- on cherche la proportion de boules dans l'urne

? -> ○ ● ○ ● ○





# Aléatoire - Inconnu

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique

## ❖ Aléatoire - Inconnu

- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- ★ il ne faut pas confondre aléatoire et inconnu
  - en proba
  - le résultat (du tirage) est
    - inconnu
    - aléatoire
  - en stats la proportion (dans l'urne) est
    - inconnue
    - non aléatoire (elle est fixée)



# Paramètres, estimateurs, estimation

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- les paramètres sont liés au modèle
- ils sont inconnus (mais pas aléatoires : comme déjà dit)
- ★ ils sont notés par des lettres grecques
- on peut :
  - les estimer
  - tester des hypothèses les concernant
- exemples



# Paramètres : exemples

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

## Modèle poissonien

$$P(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

## Modèle gaussien (normal)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

➤ connaître quelques lettres grecques

- $\theta, \mu, \sigma, \lambda, \pi$  (attention  $\approx 3.141592\dots$ , on peut utiliser  $\omega$ ),  $\beta, \alpha,$



# Ce qu'il faut faire en pratique

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples

## ❖ Ce qu'il faut faire en pratique

- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- identifier le contexte inférentiel (estimation ponctuelle, estimation par intervalle, test)
- identifier la variable d'intérêt
- identifier le modèle
- identifier le(s) paramètre(s) concerné
- écrire proprement le modèle en faisant apparaître :
  - la variable d'intérêt
  - le(s) paramètre(s) d'intérêt



## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique

## ❖ Écriture du modèle

- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

## Écriture formelle du modèle (probabiliste)

$$X \sim \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dots)$$

## Écriture littéraire du modèle

La variable d'intérêt  $X$  est postulée suivre une loi de probabilité  $\mathcal{L}$  de paramètres  $\theta_1, \theta_2, \dots$



# Estimation - Rappels

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle

## Estimation - Rappels

- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse
- ❖ Résumé
- ❖ Exercices

- l'estimation (paramétrique) est une méthode statistique qui a pour but de donner une information sur un paramètre inconnu
  - sous forme de valeur : estimation ponctuelle
  - sous forme d'intervalle : estimation ensembliste (ou par intervalle)



# Question portant sur des paramètres (hors estimation)

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels

## ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)

❖ Introduction aux tests d'hypothèse

❖ Résumé

❖ Exercices

- on veut savoir si la taille des garçons est différente de la taille des filles

- on propose un modèle général

$$T : \text{taille (d'un étudiant)} \sim \mathcal{G}(\mu, \sigma)$$

on peut remplacer  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{N}$

- on peut le décliner en deux modèles

$$T_f : \text{taille d'une étudiante} \sim \mathcal{G}(\mu_f, \sigma_f)$$

$$T_g : \text{taille d'un étudiant} \sim \mathcal{G}(\mu_g, \sigma_g)$$

- la question est donc de savoir si  $\mu_f = \mu_g$
- ★ la question de savoir si  $\sigma_f = \sigma_g$  est une question supplémentaire (secondaire)



# Introduction aux tests d'hypothèse

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)

## ❖ Introduction aux tests d'hypothèse

## ❖ Résumé

- on formalise la question posée par deux hypothèses contradictoires
  - ici on a les deux hypothèses
    - $\mu_f = \mu_g$  : les espérances de la taille des filles et des garçons sont les mêmes
    - $\mu_f \neq \mu_g$  : les espérances de la taille des filles et des garçons sont différentes
  - cf cours de stat exploratoire STID1 : il y a (ou non) un lien entre le sexe et la taille
  - ★ pas d'exigence de forme de spécification (formelle, littéraire, différences d'espérance, lien,...)
  - mais exigence des deux hypothèses contradictoires





# Résumé

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse

- j'attends de vous
- dès aujourd'hui
- que vous soyez capables
  1. de spécifier le modèle utilisé
  2. de spécifier les deux hypothèses alternatives

## ❖ Résumé



# Exercices

## Introduction

- ❖ Programme pédagogique national
- ❖ Contenus
- ❖ Statistique paramétrique
- ❖ Modélisation
- ❖ Modèle
- ❖ Probabilités et Statistique
- ❖ Aléatoire - Inconnu
- ❖ Paramètres, estimateurs, estimation
- ❖ Paramètres : exemples
- ❖ Ce qu'il faut faire en pratique
- ❖ Écriture du modèle
- ❖ Estimation - Rappels
- ❖ Question portant sur des paramètres (hors estimation)
- ❖ Introduction aux tests d'hypothèse

- le bocal d'€ contaminé par des Fr
- l'effet d'un médicament sur la durée de vie
- Shakespeare a-t-il écrit Shakespeare ?