



Estimation et tests d'hypothèses

Thierry Dhorne

6 septembre 2016



QCM d'évaluation

❖ QCM d'évaluation

- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce



Compétences atteintes

❖ QCM d'évaluation

❖ Compétences atteintes

❖ Hypothèses et Réalité

❖ Hypothèses et décision

❖ Règle de décision statistique

❖ Statistique de test - Exemple

❖ Résumé de la situation

❖ Décision et erreur

❖ Risques et règle de décision

❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson

❖ Falsifiabilité

❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson

❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses

❖ Nouveau résumé de la situation

❖ Risques associés

❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

● être capable

1. de spécifier le modèle utilisé

2. de spécifier les deux hypothèses alternatives



Hypothèses et Réalité

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- reprenons l'exemple du bocal de pièces
 - on veut savoir si le taux de contamination est supérieur à π (par exemple 18 %)
 - on a donc naturellement les deux hypothèses :
 - H_1 : le taux de contamination est inférieur ou égal à 18%
 - H_2 : le taux de contamination est supérieur à 18%
- la réalité est inconnue
 - car on ne sait pas si c'est H_1 ou H_2 qui est vraie
 - ★ mais ATTENTION, elle n'est pas aléatoire (une seule des deux est vraie et est toujours vraie)



Hypothèses et décision

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- bien qu'on ne sache pas qu'elle est la réalité
- on doit prendre une décision
- par exemple, faire une campagne de vaccinations, ou interdire les voitures de rouler....
- on peut donc se tromper
- il y a deux décisions possibles :
 - décider H_1 , qu'on note $D(H_1)$ ou D_1
 - décider H_2 , qu'on note $D(H_2)$ ou D_2
- ★ ATTENTION, il ne faut pas confondre l'hypothèse et la décision, ni la réalité et la décision



Règle de décision statistique

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

Définitions

On appelle règle de décision statistique une règle de décision basée sur une expérience statistique dont le résultat dépend du paramètre (ou de la fonction des paramètres) concerné par la décision.

L'expérience statistique est notée T elle est fonction du modèle probabiliste X , la décision (aléatoire) est notée $D(T)$.

★ la règle de décision statistique est souvent appelée « statistique de test »



Statistique de test - Exemple

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique

❖ Statistique de test - Exemple

- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- exemple du bocal de pièces
- X est une variable de Bernoulli : € ou Fr
- $T(X_n)$ est le résultat (nombre de cas positifs) d'un tirage de n de ces X (avec ou sans remise)
- $D(T)$ est définie ainsi
 - si $T \leq t_s$ on décide H_1
 - si $T > t_s$ on décide H_2
- ★ T est une variable aléatoire
- ★ T dépend de π : proportion d'€



Résumé de la situation

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple

Résumé de la situation

- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

0. spécification du modèle
1. spécification des hypothèses
2. obtention de la statistique de test
3. spécification de la forme des régions de décision



Décision et erreur

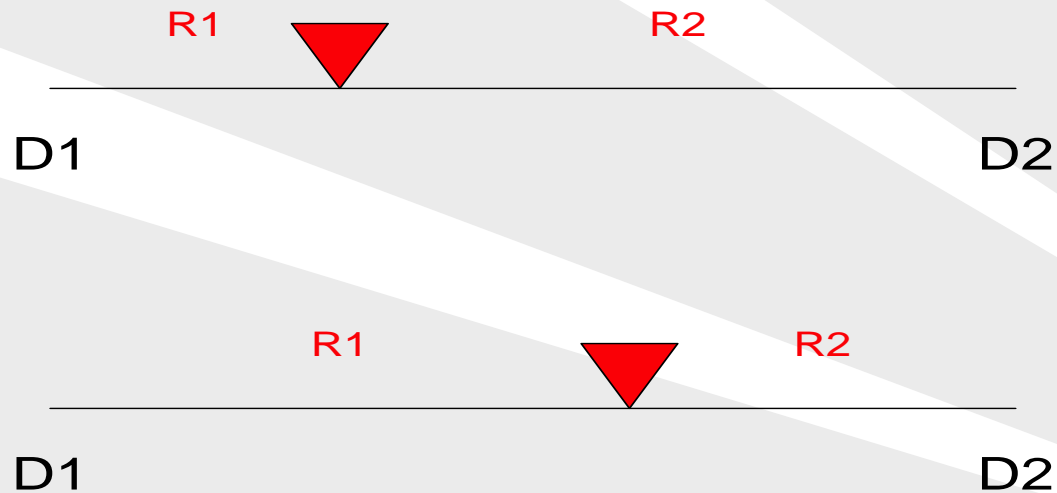
- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ **Décision et erreur**
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- il y a donc 4 cas possibles
 - H_1 est vraie et on décide H_1 : H_1 et D_1 , on a raison
 - H_1 est vraie et on décide H_2 : H_1 et D_2 , on se trompe
 - H_2 est vraie et on décide H_2 : H_2 et D_2 , on a raison
 - H_2 est vraie et on décide H_1 : H_2 et D_1 , on se trompe
- toute décision présente donc un (deux ?) risque(s) de se tromper
 - il faut donc gérer ce(s) risque(s) au mieux



Risques et règle de décision

- les deux risques sont contradictoires
- à ressource fixée, lorsque l'un augmente, l'autre diminue
- et réciproquement
- ★ problème de l'innocent et du coupable
- ou problème de la ministre et de la maire



- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce



Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- la théorie (en réalité deux théories) s'appuie sur
 - l'identification d'une hypothèse de référence (à infirmer)
 - la normalisation du risque attaché à cette hypothèse



Falsifiabilité

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- falsifiabilité ou réfutabilité
- principe consistant à formuler une hypothèse puis à montrer qu'elle est fausse (car ses conséquences sont impossibles)
- raisonnement par l'absurde des mathématiciens
- exemple : l'église dit que le soleil tourne autour de la terre, Galilée montre que c'est la terre qui tourne autour du soleil



Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- la pratique scientifique habituelle consiste à choisir comme hypothèse à nier l'hypothèse la plus « défavorable »
 - si je veux montrer qu'un médicament est efficace, je vais supposer qu'il ne l'est pas et montrer que ceci est faux
 - si je veux montrer qu'un médicament ne fait pas chuter les cheveux, je vais supposer qu'il les fait chuter et montrer que ceci est faux
- logique du "prouve le !"
- exemple pour le bocal de pièce : je veux prouver que la proportion de Fr est supérieure à 0.18
 - je choisis comme hypothèse de référence : $\pi \leq 0.18$



Dissymétrisation des 2 hypothèses

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- jusqu'ici les deux hypothèses étaient symétriques : H_1 et H_2
- la théorie de FNP les dissymétrise en privilégiant une hypothèse que l'on espère infirmer
 - cette hypothèse s'appelle hypothèse nulle (ou de référence)
 - on la note (maintenant) H_0
- l'autre hypothèse est appelée hypothèse alternative (ou critique)
 - on la note H_1



Nouveau résumé de la situation

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

0. spécification du modèle
1. spécification des hypothèses
 - hypothèse nulle : H_0
 - hypothèse alternative H_1
2. obtention de la statistique de test
3. spécification de la forme des régions de décision



Risques associés

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- les deux hypothèses étant hiérarchisés
- on identifie les deux risques :
- $P(D_1 / H_0)$: probabilité de décider H_1 quand H_0 est vraie
- on l'appelle risque de première espèce
- $P(D_0 / H_1)$: probabilité de décider H_0 quand H_1 est vraie
- on l'appelle risque de deuxième espèce



Contrôle du risque de 1ère espèce

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

- la démarche scientifique invite à choisir un risque de 1ère espèce faible
- ★ ne décider H_1 que si vraiment on en est sûr (ou presque)
- en pratique, il existe deux démarches
 - on fixe $P(D_1/H_0)$ à une valeur faible : 5 %, 1%,... on en déduit un seuil critique (méthode classique)
 - on calcule la proba observée $P(D_1/h_0)$ (proba critique) et on « décide » si elle est faible ou pas (méthode moderne)



Résumé complet de la méthode classique

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

0. spécification du modèle
1. spécification des hypothèses
 - hypothèse nulle : H_0
 - hypothèse alternative H_1
2. obtention de la statistique de test (aléatoire)
3. spécification de la forme des régions de décision
4. normalisation de la région de décision
5. calcul de la statistique de test (observée)
6. décision



Résumé complet de la méthode moderne

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce

0. spécification du modèle
1. spécification des hypothèses
 - hypothèse nulle : H_0
 - hypothèse alternative H_1
2. obtention de la statistique de test (aléatoire)
3. spécification de la forme des régions de décision
4. calcul de la probabilité critique de la statistique de test observée
5. évaluation et décision



Exemple complet du bocal de pièces

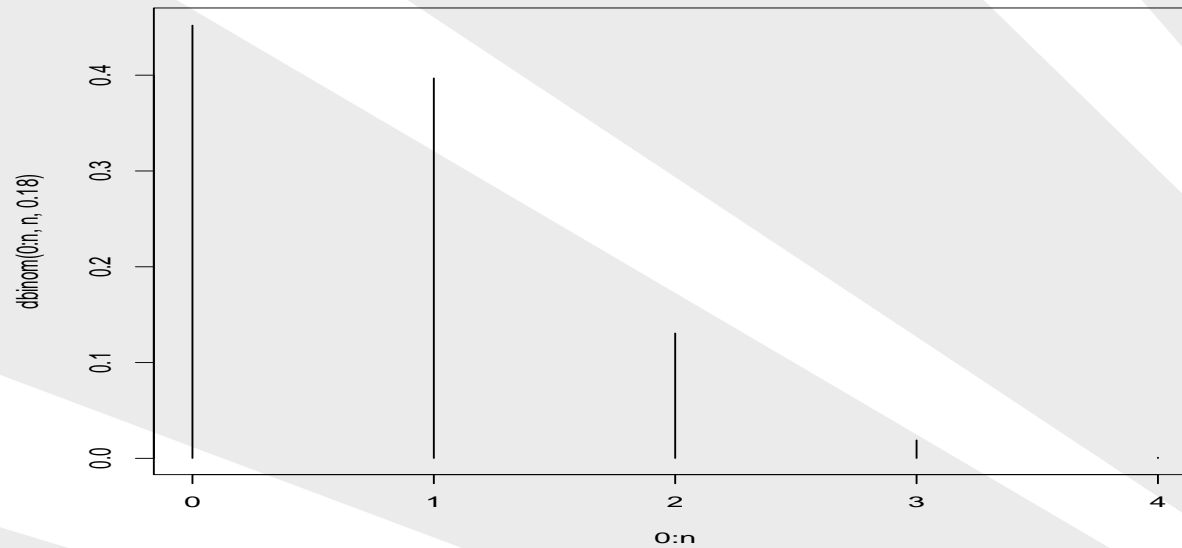
Fait au tableau (sera détaillé sur demande)

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce



Loi de T sous H_0 , $n=4$

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce



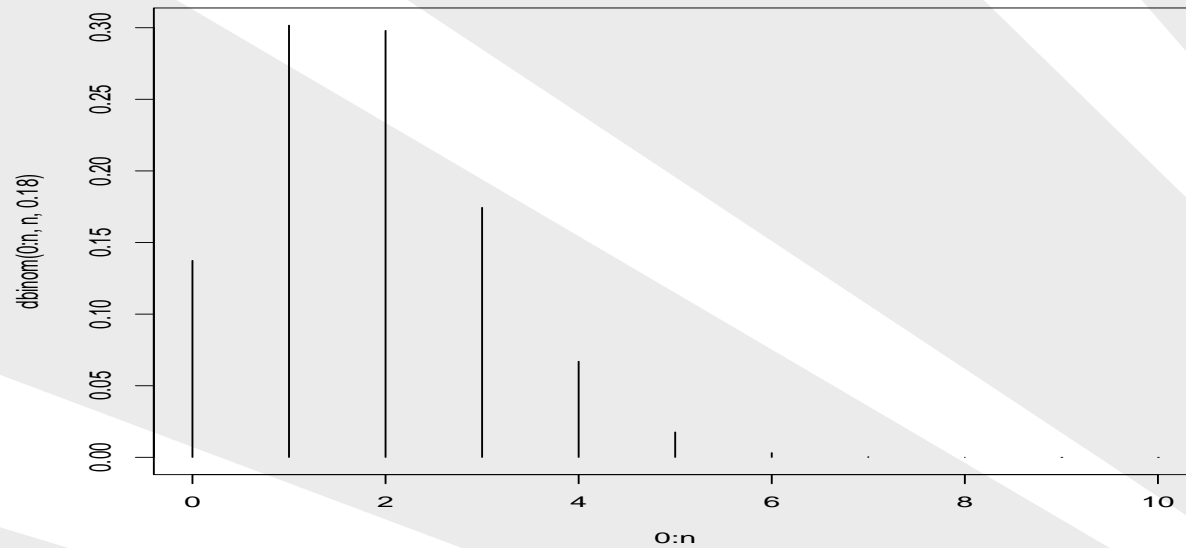
```
round(dbinom(0:n, n, 0.18), 2)
```

```
[1] 0.45 0.40 0.13 0.02 0.00
```



Loi de T sous H_0 , $n=10$

- ❖ QCM d'évaluation
- ❖ Compétences atteintes
- ❖ Hypothèses et Réalité
- ❖ Hypothèses et décision
- ❖ Règle de décision statistique
- ❖ Statistique de test - Exemple
- ❖ Résumé de la situation
- ❖ Décision et erreur
- ❖ Risques et règle de décision
- ❖ Contrôle du risque : théorie de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Falsifiabilité
- ❖ Pour les tests de Fisher, Neyman-Pearson
- ❖ Dissymétrisation des 2 hypothèses
- ❖ Nouveau résumé de la situation
- ❖ Risques associés
- ❖ Contrôle du risque de 1ère espèce



```
round(dbinom(0:n, n, 0.18), 2)
```

```
[1] 0.14 0.30 0.30 0.17 0.07 0.02 0.00 0.00 0.00  
[10] 0.00 0.00
```