Estimation et tests d’hypothèses

Thierry Dhorne

27 septembre 2016

Rappels

État des lieux

- les situations étudiées
- test sur une variance (à connaître parfaitement)
- ➤ puissance du test (à connaître parfaitement)
- test sur une espérance à variance inconnue (à connaître parfaitement)
- ➤ puissance du test (à connaître parfaitement)
- test de comparaison d'espérance (à connaître parfaitement)
- ★ la puissance du test de comparaison n'a pas été étudiée mais est équivalente à celle du test d'égalité

Quelques petits raffinements des comparaisons d'espérances

Expériences en blocs (ou appariées)

- parfois pour « améliorer » les expériences on identifie dans les unités expérimentales des sous-ensembles plus homogènes
  - ➤ ces sous-ensembles s'appellent des blocs
- puis on applique (tous : ici 2) les traitements sur le bloc
  - ➤ exemple

— on applique les deux crèmes amincissantes sur un même individu (une par cuisse)

— on mesure la variable avant et après traitement chez le même individu

— on sème les deux variétés dans le même champ (sur deux parcelles différentes)

➤ on dit aussi (comme il n'y a que 2 traitements) qu'ils sont appariés

Contraintes opérationnelles

- tous les (les deux) traitements doivent vus dans le même bloc
  - ➢ on dit que les blocs sont complets
  - ★ si un traitement n'est pas vu dans les 2 blocs on ignore l'observation concernée
  - ★ ou alors on ne tient pas compte des blocs (voir plus loin)
  - ➢ la taille de l'échantillon est donc $n = 2B$

Modèle

- le modèle classique pour les comparaisons d'espérances est

$$X_1 \leadsto \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2), X_2 \leadsto \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$$

soit

$$X_i \leadsto \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), i = 1, 2$$

★ mais on peut tenir compte du bloc : le patient, le champ,...

$$X_{ij} \leadsto \mathcal{N}(\mu_i + \beta_j, \sigma^2), i = 1, 2, j = 1, \ldots B$$

où B est le nombre de blocs

➤ β_j est appelé l'effet bloc : effet du patient, du champ

Incidence de l'effet bloc sur les estimateurs

- sur l'estimateur des espérances

$$E(\bar{X}_i) = \mu_i + \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} \beta_B$$

➢ l'estimateur est donc biaisé

★ mais ce biais disparaît quand on soustrait l'un à l'autre les deux estimateurs

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

- sur l'estimateur de la variance

$$E(X_{ib} - \bar{X}_i) = \beta_b - \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{B} \beta_B$$

★ donc cette quantité va venir « gonfler » la variance

➢ il faut donc « supprimer » l'effet bloc

Suppression de l'effet bloc

- on peut écrire un modèle de différence intra-bloc

$$X_{1b} - X_{2b}$$

★ dans ces cas on a

$$X_{1b} - X_{2b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma_I^2)$$

où σ_I^2 est la variance intra-bloc

➤ on retombe donc sur le modèle classique de test sur une espérance

- pour ce rendre compte de l'intérêt de la prise en compte du bloc on peut comparer les deux procédures de test

— sans prise en compte de l'effet bloc (de l'appariement)

— avec prise en compte de l'effet bloc (de l'appariement)

★ pour la raison évoquée ce test s'appelle parfois test d'égalité d'espérances (de moyennes) appariées

Comparaison d'espérances quand les variances sont différentes

Le problème

- comparer des espérances est un problème opérationnel important
- le problème de la variance semble alors secondaire
- ➤ mais il a une influence importante sur le test
- et si les variances sont effectivement différentes pour de bonnes raisons
- ➤ par exemple : on mesure deux phénomènes avec des instruments de précision différentes
- ★ que faire ?
- ➤ ce problème fait l'objet de réflexions depuis 80 ans

Les solutions

- il n'existe pas de solution simple (convaincante ?)
- si les variances des deux populations sont différentes

➤ on se dit même que les tailles des deux échantillons devraient être structurellement différentes

Statistique de test

- on part de l'estimateur classique

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

➤ sa variance est

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

- on peut estimer cette variance à partir d'un estimateur de chacune des deux variances

★ qui sont maintenant postulées différentes

➤ on dispose d'un estimateur de la variance de la statistique utilisable

La solution de Satterthwaite - Welch - Aspin

- la statistique de test est assez facile à définir

➢ mais sa distribution est complexe car elle dépend de 2 paramètres

★ Ce n'est donc pas un χ_2

- Satterthwaite, Welch puis Aspin proposent d'approximer cette distribution par celle d'un χ^2 dont le nombre de ddl est une fonction des paramètres

➢ ce nombre de ddl n'est en général pas entier

Degré de liberté corrigés pour le test de Aspin - Welch - Satterthwaite

Les degrés de liberté corrigés du test d'Aspin - Welch - Satterthwaite sont donnés par la formule suivante

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Le dernier cas gaussien

- test sur une espérance
- test sur une variance
- test de comparaison d'espérances
- ➢ manque
- ★ test de comparaison de variances

Test de comparaison de variances

Hypothèses

- la version classique consiste à tester si les 2 niveaux de variabilité sont égaux ou pas

— $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

— $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

➤ on peut être conduit à un test unilatéral si on dispose d'informations supplémentaires, par exemple

— $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$

— $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

- seul le cas standard sera étudié

➤ il suffit de changer la probabilité de référence pour le cas bilatéral

Hypothèses - Reformulation

- on pourrait reformuler le test de la façon suivante

— $H_0 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0$
— $H_1 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq 0$

★ CE N'EST PAS CE QUI EST FAIT

- on préfère tenir compte du caractère

— positif
— multiplicatif (paramètre d'échelle)

➤ on écrit donc l'hypothèse sous forme d'un ratio de variances

— $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

— $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Protocole et Statistique de test

- le protocole consiste à tirer un échantillon dans chaque sous-population

$$\{X_{11}, X_{12}, \ldots, \_1r, \ldots, X_{1n_1}\}, \{X_{21}, X_{22}, \ldots, \_2r, \ldots, X_{2n_2}\}$$

- la statistique de test est naturellement

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

➤ pour éviter des difficultés on ne s'intéresse qu'au ratio supérieur à 1

$$\frac{\max(S_1^2, S_2^2)}{\min(S_1^2, S_2^2)}$$

➤ on se ramène donc à un cas unilatéral à rejet supérieur

Loi de la statistique de test

- le numérateur et le dénominateur étant des estimateurs de variances suivent des loi de χ^2 divisées par leur nombre de ddl

— $S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{r=1}^{n_1}(X_{1r}-\bar{X}_1)^2 \rightsquigarrow \sigma_1^2\frac{\chi^2_{n_1-1}}{n_1-1}$

— $S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{r=1}^{n_2}(X_{2r}-\bar{X}_2)^2 \rightsquigarrow \sigma_2^2\frac{\chi^2_{n_2-1}}{n_2-1}$

- la statistique de test est donc le rapport de deux χ^2

★ il faut trouver (et connaître) cette loi

Loi du rapport de deux χ^2

Loi de Fisher

La loi du rapport d'un χ^2 à ν_1 ddl et d'un χ^2 à ν_2 ddl, chacun divisé par son nombre de ddl et indépendants entre eux est celle d'un F de Fisher à ν_1 et ν_2 ddl

$$\frac{\frac{\chi^2_{\nu_1}}{\nu_1}}{\frac{\chi^2_{\nu_2}}{\nu_2}} \rightsquigarrow \mathscr{F}_{\nu_1,\nu_2}$$

➤ $\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F_{n_1-1,n_2-1}$

Allure des lois de Fisher