Optimisation

Thierry Dhorne by Salim Lardjane

1er février 2018

Solution numérique d'une équation $f(x) = 0$

Problème

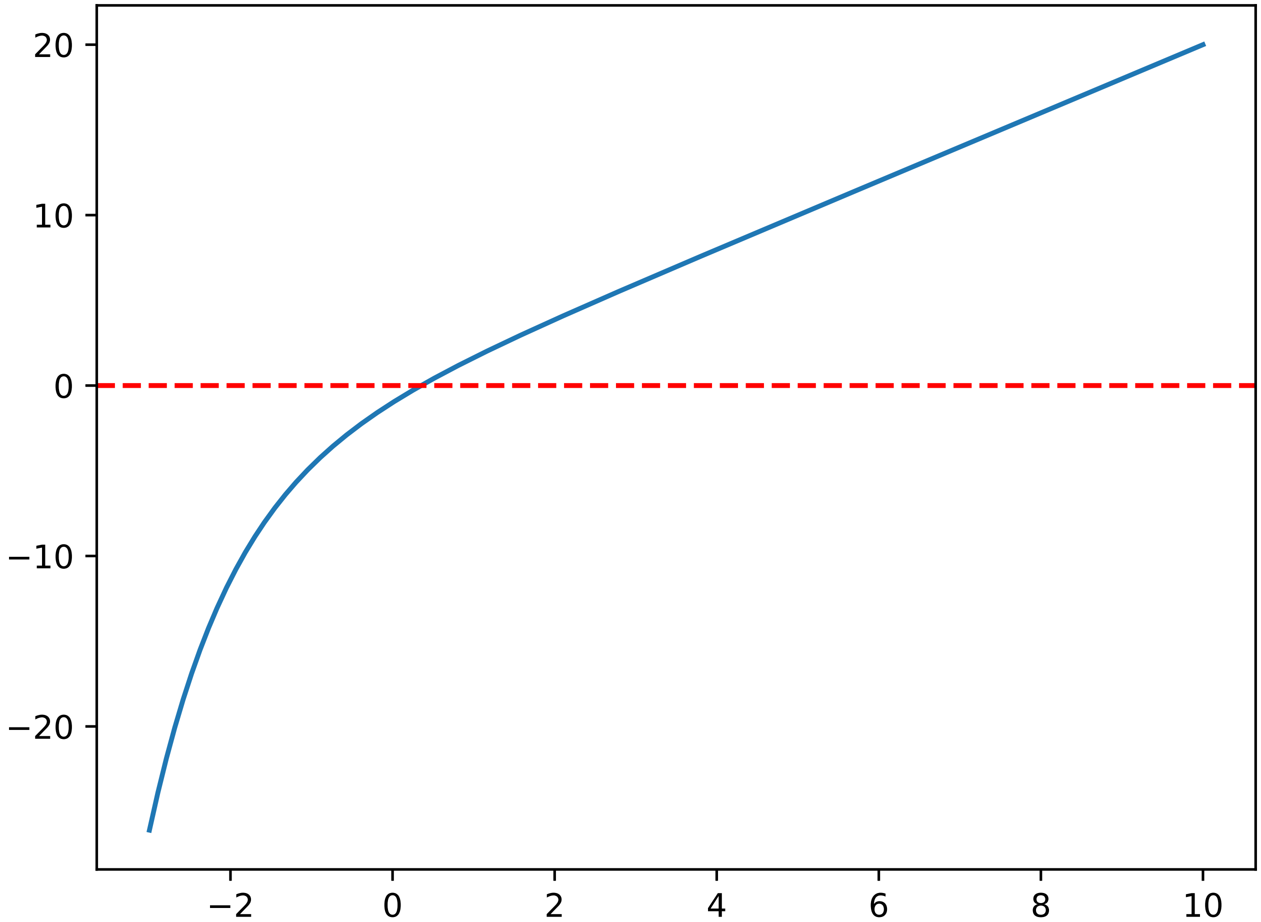
- équation à résoudre

$$f(x) = 0$$

- pas de solution analytique -> au moins pas d'inverse de f
- ★ pas de fonction « codée »
- exemple

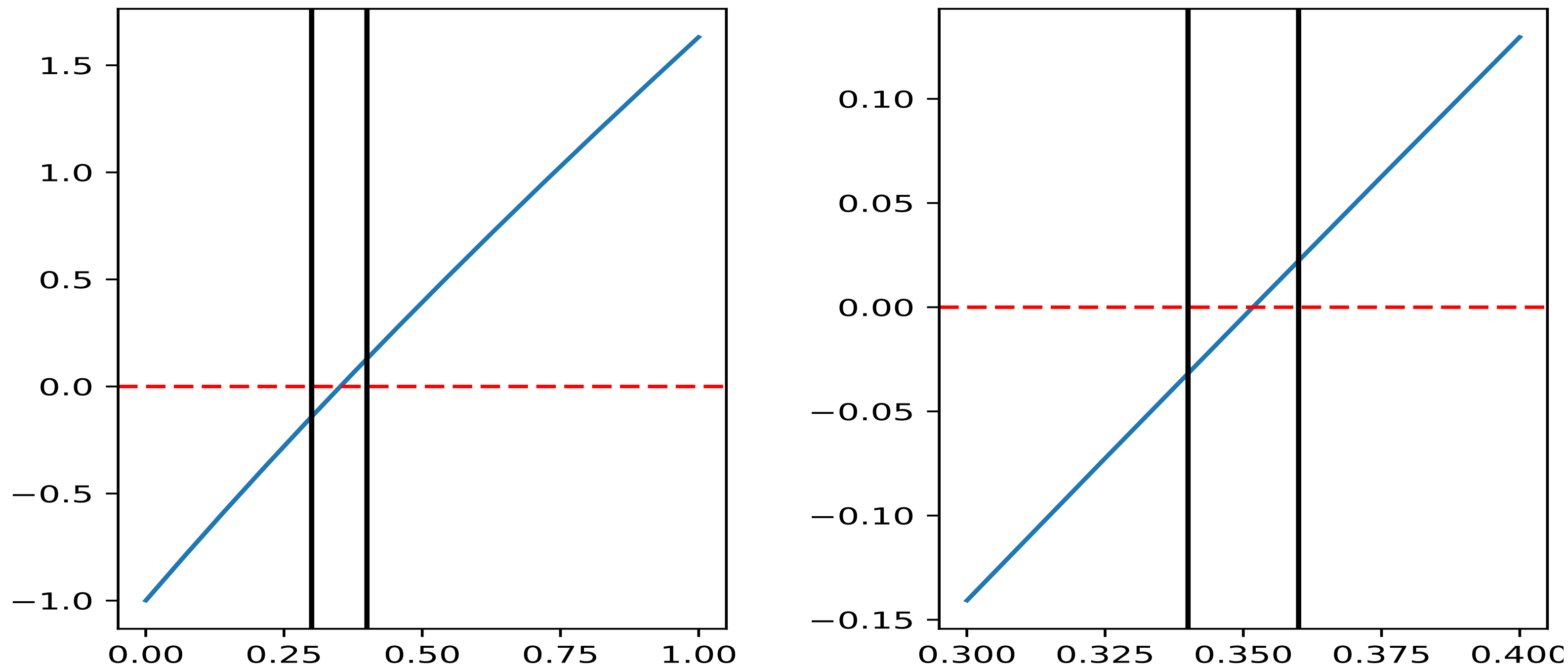
$$f(x) = 2x - exp(x)$$

Graphe



Méthode « manuelle »

- la méthode manuelle consiste à encadrer la valeur
  - ➤ en resserant l'intervalle d'observation



Méthodes algorithmiques

- l'encadrement bouge les deux limites à chaque fois
- on peut bouger une ou deux limites à chaque fois
- ➤ méthode dichotomique (à une ou deux limites)
- ➤ méthode de Fibonacci
- ➤ méthode du nombre d'or

Contraintes

- fonction simplement continue
- au moins une solution dans l'intervalle

$$f(a)f(b) < 0$$

- au plus une solution dans l'intervalle
- ★ le point de départ doit être judicieux
- ➤ c'est le cas pour beaucoup de méthodes
- ➤ s'il n'y a qu'une solution aucun risque
- ★ le cerveau humain est assez efficace pour « voir »

Méthode dichotomique

Principe

- on part de l'intervalle $[a_1, b_1]$ pour lequel

$$f(a_1)f(b_1) < 0$$

- on positionne un nouveau point m au milieu de l'intervalle

$$m = \frac{a_1 + b_1}{/}2$$

- on calcule $f(a_1) * f(m)$ et $f(b_1)f(m)$
  - ➤ un seul est négatif
  - ➤ il n'y a qu'un 0 à la fonction
  - ➤ c'est entre les deux points concernés qu'il est situé
- on dispose donc d'un nouvel intervalle de recherche
  - ➤ on continue la procédure

Algorithme


```
tant que (b - a) > ε
   m ← (a + b) / 2
   si (f(a)*f(m) <= 0) alors
      b ← m
   sinon
      a ← m
   fin
fin
```

ε est la précision numérique souhaitée

Propriétés

- l'encadrement chemine sur un graphe dichotomique
- ➤ de manière dépendant de la fonction considérée
- la largeur initiale de recherche est $b - a$
- à chaque étape elle est divisée par 2
- ➤ donc à l'étape n la largeur de recherche est

$$\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

- ➤ la précision augmente donc exponentiellement

Nombre d'itérations

- on peut donc fixer le nombre maximal d'itérations pour une précision fixée

$$\frac{b-a}{2^{n-1}} \leq \epsilon \Rightarrow n > \frac{\ln(a-b) - log(\epsilon)}{\ln(2)}$$

- qui est approximable par

$$\frac{-log(\epsilon)}{\ln(2)}$$

- soit pour une précision de 10^{-7}

23

Méthode bitomique

Principe

- à chaque étape on coupe l'intervalle en 3 parties
- ➤ de manière symétrique par rapport aux bornes

$$(a_2 - a_1) = (b_1 - b_2) = \rho(b_1 - a_1)$$

- on fait (potentiellement) 2 calculs à chaque étape
- mais un peu suffire
- ★ et dans ce cas l'intervalle est divisé par plus que 2
- on peut espérer en « réglant » ρ améliorer la vitesse

Algorithme

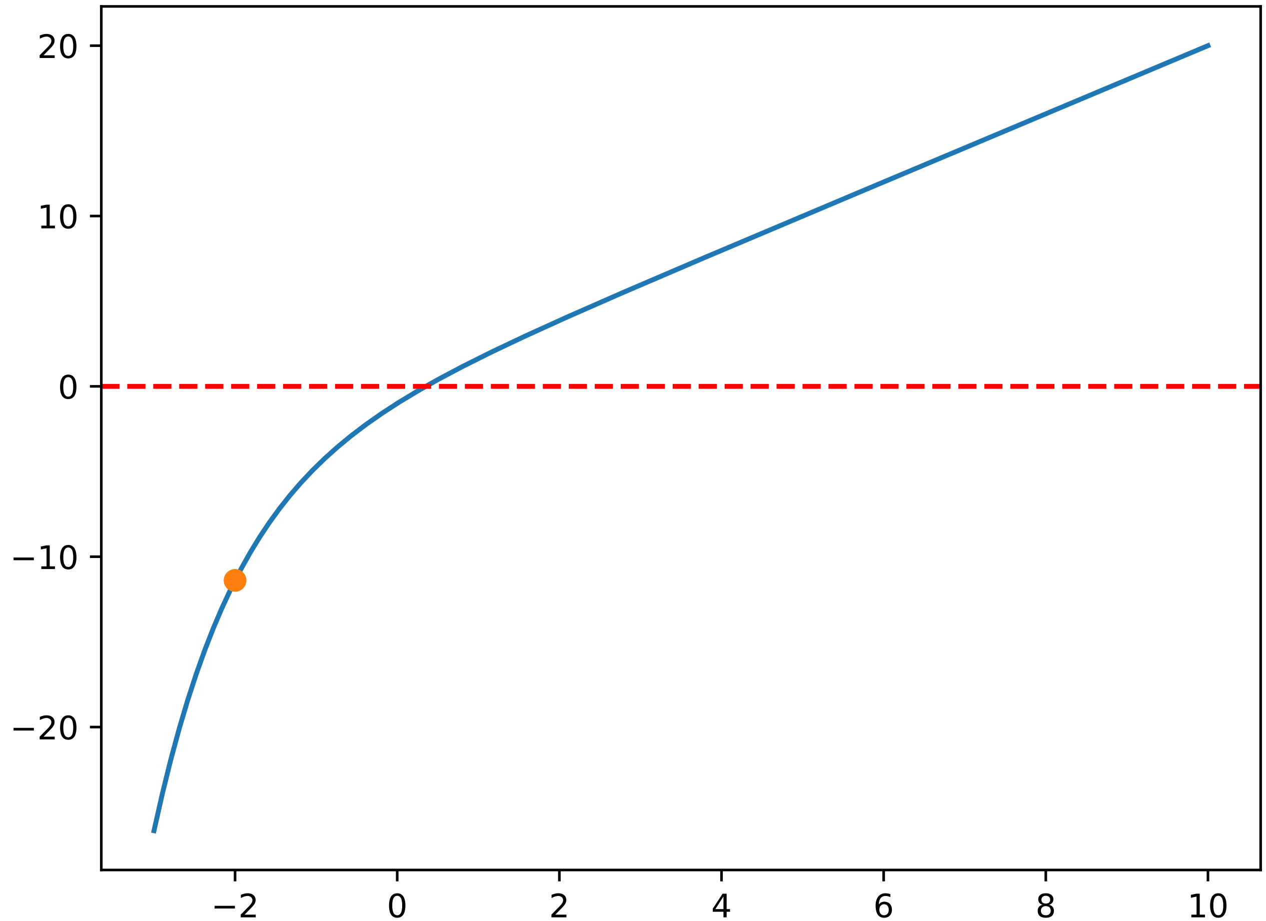
```
tant que (b - a) > ε
   m ← a + ρ (b - a)
   si (f(a)*f(m) <= 0) alors
      b ← m
   sinon
      n ← b - ρ (b - a)
      si (f(b)*f(n) <= 0) alors
      a ← n
       sinon
           b ← m
           a ← n
       fin
   fin
fin
```

ε est la précision numérique souhaitée

Approximation de la fonction

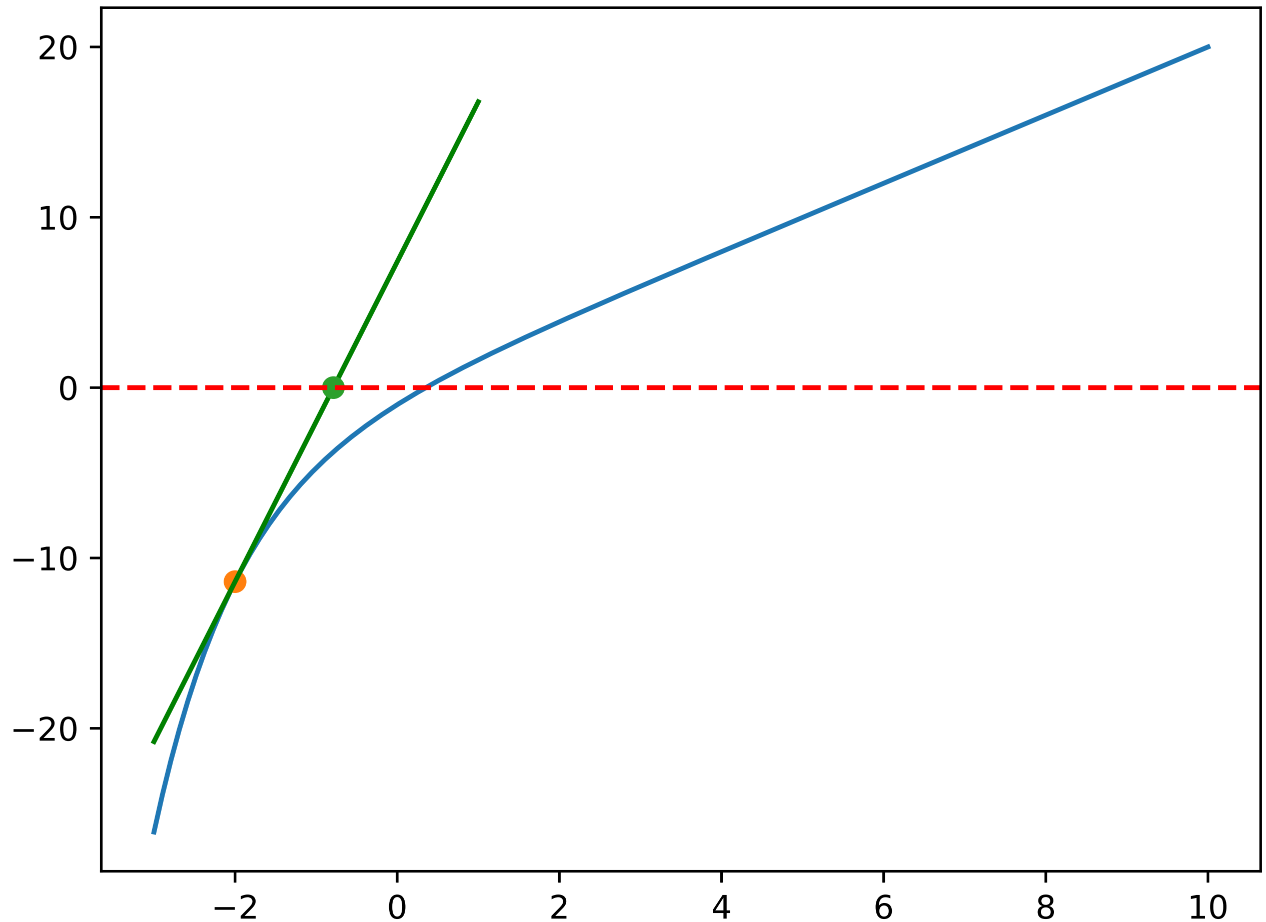
Algorithme amélioré

- si l'on connait la fonction en un point



Algorithme amélioré

- on peut approcher la fonction par sa tangente



Calcul

- l'équation de la tangente au point x_0 est donnée par

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

➤ ce qui correspond à l'approximation de la fonction à l'ordre 1

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$$

- cette approximation est utilisée pour trouver un point d'intersection avec l'axe des x